GAZETA MATEMATICĂ

SERIA A

ANUL XXVII(CVI) **Nr. 3 / 2009**

Număr închinat împlinirii a 100 de ani de la înfiinţarea Societăţii Gazeta Matematică

ARTICOLE ŞTIINŢIFICE ŞI DE INFORMARE ŞTIINŢIFICĂ

Metoda etichetării binare în probleme de combinatorică

Vasile Pop[1)]

Abstract. In this paper we present some applications of binary method in combinatorics. Many of this problems are highly difficult and some of them were given at olympids and international contests

Keywords: set chrcteristic function, binary method

MSC : O5A18, O5B20.

Introducere

Având o mulţime finită de obiecte identice ca formă, pentru individualizarea şi apoi pentru identificarea unui anumit obiect trebuie să facem o etichetare (codificare) a respectivelor obiecte. Cel mai simplu mod de etichetare este de a atribui fiecăruia câte un număr natural, de exemplu de a le enumera: alegem un element din mulţime pe care punem eticheta 1, alegem al doilea şi punem pe el eticheta 2,..., alegem ultimul element şi punem pe el eticheta n. Pentru etichetarea unui element arbitrar dintr-o mulţime de cardinal $10^n - 1$ avem nevoie, în scrierea zecimală de n cifre din mulţimea $\{0, 1, \ldots, 9\}$, deci în total numărul simbolurilor folosite pentru codificarea tuturor elementelor este $10n$. Dacă facem codificarea folosind scrierea binară, atunci pentru un element arbitrar dintr-o mulţime cu $16^n - 1 = 2^{4n} - 1$ elemente avem nevoie de $4n$ simboluri din mulţimea $\{0, 1\}$, deci în total folosim $8n < 10n$ simboluri deşi am codificat o mulţime mai numeroasă. Acest argument justifică eficienţa codificării binare în raport cu codificarea într-o altă bază de numeraţie.

În probleme de combinatorica mulţimilor etichetarea binară este extrem de naturală datorită funcţiei caracteristice a unei submulţimi, funcţie

[1)]Universitatea Tehnică, Cluj-Napoca.

cu valori de 0 şi 1, care caracterizează orice submulţime. Astfel dacă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este o mulţime cu n elemente, atunci orice submulţime $B \subset A$, din cele 2^n submulţimi poate fi etichetată prin vectorul său caracteristic $v_B \in \{0,1\}^n$ definit astfel: $v_B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ unde $b_i = 0$ dacă $a_i \notin B$ şi $b_i = 1$ dacă $a_i \in B$. Pentru mulţimea vidă vectorul caracteristic este $v_\emptyset = (0, 0, \ldots, 0)$ iar pentru mulţimea A este $v_A = (1, 1, \ldots, 1)$.

Pentru înţelegerea metodei şi pentru recunoaşterea tipurilor de probleme în care ea poate fi folosită am ales câteva probleme din domeniul teoriei jocurilor şi din domeniul combinatoricii mulţimilor, pe care le vom prezenta cu rezolvări amănunţite.

Probleme alese

1. *Un casier are la dispoziţie* 10 *plicuri în care trebuie să introducă o sumă de* 1000 *lei. Cum trebuie să distribuie banii în plicuri astfel ca dacă vine un angajat să îşi ridice salariul, casierul să îi poată da suma exactă fără să mai scoată banii din plicuri?*

2. *La curtea regelui Merlin urmează un mare ospăţ. El a primit cadou* 1000 *de sticle de vin, dar a aflat că una din sticle conţine o otravă foarte puternică. Având* 10 *condamnaţi la moarte, regele se hotărăşte să testeze vinul pe aceşti condamnaţi, putând da fiecăruia câte o picătură de vin din fiecare sticlă. Cum poate el identifica sticla otrăvită, dacă până la ospăţ mai sunt* 10 *ore şi otrava îşi face efectul în* 10 *ore?*

3. *Fie* $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z})$ *o matrice cu proprietatea:*

(P) *Pentru orice două linii* L_i, L_j *cu* $i \neq j$, *suma* $L_i + L_j$ *conţine* n *elemente numere pare şi* n *elemente numere impare.*

Să se arate că pentru orice două coloane C_i, C_j *cu* $i \neq j$, *suma* $C_i + C_j$ *conţine* n *elemente numere pare şi* n *elemente numere impare.*

4. *Jocul Nim* (*un joc chinezesc extrem de vechi*) *se joacă de două persoane care ridică de pe masă un număr oarecare de pietre dintr-o singură grămadă dintre trei grămezi de pietre. Câştigătorul este jucătorul care ia de pe masă ultima piatră. Dacă grămezile conţin* 3, 5 *şi* 7 *pietre, să se precizeze care jucător va câştiga* (*care ia primul sau al doilea*) *şi să se descrie strategia de câştig.*

5. *Fie* m, n *numere naturale nenule,* A *o mulţime cu* n *elemente şi* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *submulţimi nevide şi distincte din* A. *Să se arate că dacă* $m \geq n+1$ *atunci există două submulţimi disjuncte* $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *astfel ca* $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$.

6. *Fie* m, n *numere naturale nenule,* A *o mulţime cu* n *elemente şi* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *submulţimi nevide şi distincte din* A. *Să se arate că dacă* $m \geq n+2$ *atunci există două submulţimi disjuncte* $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *astfel ca* $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} A_j$.

7. *Fie m, n numere naturale nenule, A o mulţime cu n elemente şi $B_1, B_2, \ldots, B_m$ submulţimi proprii, nevide şi distincte, din A. Se ştie că pentru orice două elemente distincte din A există o singură mulţime B_i care le conţine pe ambele. Să se arate că $m \geq n$.*

8. *Fie m, n numere naturale nenule, A o mulţime cu n elemente şi $B_1, B_2, \ldots, B_m$ submulţimi nevide şi distincte din A. Se ştie că există $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ astfel ca $|B_i \cap B_j| = k$, oricare ar fi $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Să se arate că $m \leq n$.*

9. *Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ o matrice cu $m > n$. Să se arate că există $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi k linii distincte $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ astfel ca suma $L_{i_1} + +L_{i_2} + \ldots + L_{i_k}$ să aibă toate cele n componente numere pare.*

10. *Fie m, n numere naturale cu $m > n > 1$, A o mulţime cu n elemente şi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ submulţimi nevide, distincte ale lui A.*

Să se arate că există indici distincţi $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel ca $A_{i_1} \Delta A_{i_2} \Delta \ldots \Delta A_{i_k} = \emptyset$, unde am notat cu $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, diferenţa simetrică a mulţimilor X şi Y.

11. *Fie m, n numere naturale nenule, A o mulţime cu n elemente şi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ submulţimi nevide şi distincte din A astfel ca fiecare mulţime B_i, $i = \overline{1, n}$, să conţină un număr impar de elemente şi pentru orice $i \neq j$ mulţimea $B_i \cap B_j$ conţine un număr par de elemente. Să se arate că $m \leq n$.*

Soluţii la problemele alese

1. Mai întâi observăm că orice sumă cuprinsă între 1 şi 1000 lei (chiar până la 1023 lei) poate fi reprezentată în scrierea binară folosind cel mult 10 cifre:

$$S = \varepsilon_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 2 + \varepsilon_3 \cdot 2^2 + \ldots + \varepsilon_{10} \cdot 2^9$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{10} \in \{0, 1\}$. Dacă am introduce în cele 10 plicuri câte 1 leu, 2 lei, $2^2 = 4$ lei, $2^3 = 8$ lei,..., $2^9 = 512$ lei, atunci, pentru a da suma S, alegem plicurile pentru care $\varepsilon_i = 1$, $i = \overline{1, 10}$. Observăm că în acest mod am avea nevoie de 1023 lei. Corecţia o facem astfel: în primele 9 plicuri introducem pe rând 1 leu, 2 lei, 2^2 lei,..., $2^8 = 256$ lei, iar în ultimul plic restul banilor adică 489 lei.

Dacă salariatul cere o sumă mai mică decât 512 lei aceasta poate fi dată folosind doar plicuri din primele 9 (orice număr mai mic ca 512 are în reprezentarea în baza doi cel mult 9 cifre). Dacă salariatul cere mai mult de 511 lei atunci îi dăm mai întâi ultimul plic (cu 489 lei) şi apoi suma rămasă (mai mică ca 512 lei) poate fi acoperită folosind primele 9 plicuri.

2. Etichetăm sticlele cu numerele $1, 2, \ldots, 1000$ scrise în baza 2, deci fiecare sticlă va avea un cod de 10 cifre din mulţimea $\{0, 1\}$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{10})$ în loc de $k = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 2^2 + \ldots + c_{10} \cdot 2^9$.

Primul condamnat bea din sticlele în care $c_1 = 1$ (toate sticlele cu număr impar), al doilea din cele cu $c_2 = 1$, $\ldots$, al zecelea din cele în care $c_{10} = 1$ (fiecare bea cam din jumătate din sticle). Dacă după cele 10 ore au murit condamnaţii $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ atunci sticla otrăvită are numărul $2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + \ldots + 2^{i_k-1}$.

3. Asociem matricii $A = [a_{ij}]$, matricea $B = [b_{ij}]$ în care $b_{ij} = 1$ dacă a_{ij} este număr par şi $b_{ij} = -1$ dacă a_{ij} este număr impar ($b_{ij} = (-1)^{a_{ij}}$).

Observăm că matricea A are proprietatea (P) dacă şi numai dacă produsul oricăror două linii L_i' şi L_j' din matricea B conţine n de 1 şi n de -1, adică $\sum\limits_{k=1}^{2n} b_{ik}b_{jk} = 0$. Deoarece $\sum\limits_{k=1}^{2n} (b_{ik})^2 = 2n$, oricare ar fi $i = \overline{1, 2n}$, rezultă că A are proprietatea (P) dacă şi numai dacă $B \cdot B^t = 2n \cdot I_{2n}$. Evident avem şi $B^t \cdot B = 2n \cdot I_{2n}$, relaţie care reinterpretată dă aceleaşi condiţii asupra coloanelor matricei B, respectiv asupra coloanelor matricei A.

Observaţie. Se poate pune problema: care sunt numerele naturale n pentru care există A de dimensiune $2n$ cu proprietatea (P). Nu ştiu răspunsul dar cred că sunt numai numerele de forma $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

4. Vom prezenta jocul Nim în cazul general. Se dau n grămezi de pietre. Doi jucători ridică alternativ orice număr de pietre dintr-o singură grămadă. Câştigă cel care ia ultima piatră.

Vom preciza situaţiile în care câştigătorul este cel care începe jocul sau al doilea jucător şi în fiecare caz vom prezenta strategia de câştig.

– Dacă avem o singură grămadă, evident că primul jucător câştigă, luând dintr-o dată toate pietrele.

– Dacă avem două grămezi avem două cazuri esenţial diferite:

a) dacă în cele două grămezi sunt un număr egal de pietre va câştiga al doilea jucător: după ridicarea unui număr de pietre de către primul jucător, rămân număr inegal de pietre în cele două grămezi. Al doilea joacă bine dacă ridică din cealaltă grămadă acelaşi număr de pietre câte a ridicat primul. Astfel primul jucător este în aceeaşi situaţie (număr egal de pietre în fiecare grămadă). Continuând astfel jocul, la ultima mutare a primului jucător, acesta trebuie să termine una din grămezi după care al doilea ia toate pietrele din a doua grămadă.

b) dacă în cele două grămezi sunt numere diferite de pietre, primul jucător câştigă folosind aceeaşi strategie (ridică din grămada mai numeroasă atâtea pietre astfel ca să rămână număr egal de pietre şi îl pune pe al doilea jucător în situaţia de pierdere).

– În cazul în care numărul n este cel puţin 3, strategia câştigătoare pentru primul sau al doilea jucător necesită la fiecare moment scrierea numerelor de pietre din fiecare grămadă în baza 2.

Să presupunem că numerele de pietre $N_1, N_2, \ldots, N_n$ din cele n grămezi se scriu în baza doi cu cel mult k cifre. Dacă $N_i = \varepsilon_1 \cdot 2^{k-1} + \varepsilon_2 \cdot 2^{k-2} + \ldots + \varepsilon_k \cdot 1$, cu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$, atunci etichetăm grămada respectivă cu k-uplul $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \in \{0, 1\}^k$. În $\{0, 1\}^k$ sau $\mathbb{Z}_2^k$ definim suma modulo 2 care se face pe componente după regula $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ şi $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ (numită uneori şi sumă nim).

Arătăm că orice poziţie câştigătoare (pentru jucătorul care urmează la mutare) este orice poziţie în care suma nim $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n \neq (0, 0, \ldots, 0)$ în $\{0, 1\}^k$ şi vom descrie strategia de joc prin care se câştigă. Strategia câştigătorului este de a lua atâtea pietre dintr-o anumită grămadă astfel ca suma nim pe care o lasă pe masă să fie $(0, 0, \ldots, 0)$. Într-o astfel de stare, celălalt jucător nu poate evita să-i lase primului tot o situaţie câştigătoare.

Avem de demonstrat două lucruri:

1) Dintr-o poziţie în care suma nim este $(0, 0, \ldots, 0)$, prin orice mutare se ajunge la o stare în care suma nim este diferită de $(0, 0, \ldots, 0)$.

2) Dintr-o poziţie în care suma nim este diferită de $(0, 0, \ldots, 0)$ putem găsi o grămadă din care luăm un număr (bine gândit) de pietre ca să ajungem la o poziţie cu suma nim $(0, 0, \ldots, 0)$.

Pentru 1) să observăm că dacă grupăm în fiecare grămadă pietrele conform scrierii în baza 2 (de exemplu dacă $N_i = 13 = 2^3 + 2^2 + 1$ avem trei grupe: una cu o piatră, una cu 4 pietre şi una cu 8 pietre), atunci suma nim egală cu $(0, 0, \ldots, 0)$ semnifică faptul că avem în toate cele n grămezi număr par de grupe de 1, număr par de grupe de 2,..., număr par de grupe de 2^{k-1} pietre. Luând pietre dintr-o singură grămadă desfiinţăm câte o singură grămadă de fiecare tip care intră în exprimarea numărului de pietre ridicate (de exemplu dacă ridicăm $6 = 2 + 2^2$ pietre, desfiinţăm o grupă de 2 şi o grupă de 4 rămânând aceste grupe în număr impar) şi rămân unele grupe impare deci suma nim nenulă.

Pentru 2) să notăm cu $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ suma nim a numerelor $N_1, N_2, \ldots, N_n$:

$$S = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$$

şi considerăm sumele nim:

$$M_1 = N_1 \oplus S, \quad M_2 = N_2 \oplus S, \ldots, \quad M_n = N_n \oplus S,$$

din care alegem pe cea care rescrisă ca număr în baza 2 este cea mai mică. Dacă aceasta este $M_i = N_i \oplus S$ atunci $M_i < N_i$ (din N_i dispare cel puţin grupa cu numărul 2^p cel mai mare de pietre din grupele lui N_i), atunci lăsăm în grupa N_i doar M_i pietre. În noua stare suma nim va fi:

$$N_1 \oplus \ldots \oplus N_{i-1} \oplus (N_i \oplus S) \oplus N_{i+1} \oplus \ldots \oplus N_n =$$
$$= (N_1 \oplus \ldots \oplus N_{i-1} \oplus N_i \oplus N_{i+1} \oplus \ldots \oplus N_n) \oplus S = S \oplus S = (0, 0, \ldots, 0).$$

Dăm, în continuare, un exemplu de joc cu grupe de 3, 5, 7 pietre:

$$N_1 = 3 := (0, 1, 1)$$
$$N_2 = 5 := (1, 0, 1)$$
$$N_3 = 7 := (1, 1, 1)$$
$$S := (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$$

deci primul jucător câştigă.

$$S \oplus N_1 = (0,1,0) = 2, \quad S \oplus N_2 = (1,0,0) = 4, \quad S \oplus N_3 = (1,1,0) = 6$$

şi avem $2 < 4 < 6$. Vom lăsa în prima grupă doar două pietre şi astfel a doua poziţie este:

$$2 := (0,1,0), \quad 5 := (1,0,1), \quad 7 := (1,1,1), \text{ cu } S = (0,0,0).$$

Să presupunem că al doilea jucător ia din ultima grupă 6 pietre şi rămâne situaţia:

$$2 := (0,1,0), \quad 5 := (1,0,1), \quad 1 := (0,0,1),$$

cu $S = (1,1,0) \neq (0,0,0)$.

Avem:

$$S \oplus 2 = (1,0,0) = 4, \quad S \oplus 5 = (0,1,1) = 3, \quad S \oplus 1 = (1,1,1) = 7$$

şi $3 < 4 < 7$. Mutarea bună este să lăsăm în a doua grămadă trei pietre, deci rămâne situaţia:

$$2 := (0,1,0) \quad 3 := (0,1,1) \quad 1 := (0,0,1),$$

cu $S = (0,0,0)$.

Dacă, de exemplu, al doilea jucător ia din grămada a doua două pietre rămâne situaţia:

$$2 := (0,1,0) \quad 1 := (0,0,1) \quad 1 := (0,0,1),$$

cu $S = (0,1,0) \neq (0,0,0)$.

Avem:

$$S \oplus 2 = (0,0,0) = 0, \quad S \oplus 1 = (0,1,1) = 3, \quad S \oplus 1 = (0,1,1) = 3$$

şi mutarea bună este să eliminăm prima grămadă. Continuarea este evidentă.

5. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi pentru fiecare submulţime $A_i \subset A$ definim vectorul caracteristic $v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, $i = \overline{1,m}$, unde $x_{ij} = 1$ dacă $a_j \in A_i$ şi $x_{ij} = 0$ dacă $a_j \notin A_i$. Observăm că:

$$|A_i| = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 \quad \text{şi că} \quad |A_i \cap A_j| = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk}.$$

Deoarece $m > n$, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sunt liniar dependenţi în $\mathbb{R}^n$, deci există numerele reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ astfel ca:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0.$$

Notăm cu I mulţimea indicilor i pentru care $\alpha_i > 0$ şi cu J mulţimea indicilor J pentru care $\alpha_j < 0$ şi scriem relaţia sub forma:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = \sum_{j \in J} (-\alpha_j) v_j \overset{not}{=} (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Vom arăta că $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$.

Fie a_k în reuniunea din stânga. Dacă $a_k \in A_i$ atunci $x_{ik} = 1$, $\alpha_i x_{ik} > 0$ şi din $y_k \geq \alpha_i x_{ik}$ rezultă $y_k \neq 0$. Ţinând cont de egalitatea:

$$\sum_{j\in J}(-\alpha_j)v_j = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n)$$

rezultă că există un v_j cu:

$$(v_j)x_{jk} \neq 0 \Leftrightarrow x_{jk} \neq 0 \Leftrightarrow a_k \in A_j$$

şi am arătat o incluziune (cealaltă este simetrică).

Observaţie. Numărul $m = n + 1$ este cel mai mic număr de mulţimi cu această proprietate după cum rezultă din exemplul:

$$A_1 = \{a_1\}, \quad A_2 = \{a_2\}, \ldots, A_n = \{a_n\} \text{ şi } \bigcup A_i \neq \bigcup A_j.$$

6. Considerăm mulţimile $B_i = \overline{A_i} = A \setminus A_i$, $i = \overline{1, m}$. Cel puţin $m - 1$ din ele sunt nevide şi cum $m - 1 > n$, conform problemei 5, rezultă că există I, J disjuncte astfel ca:

$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{j\in J} B_j \Leftrightarrow \overline{\bigcup B_i} = \bigcup \overline{B_j} \Leftrightarrow \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J} A_j.$$

Numărul $m = n + 2$ este cel mai mic cu proprietatea din enunţ, după cum rezultă din exemplul:

$$A_1 = \{a_1\}, \quad A_2 = \{a_2\}, \ldots, A_n = \{a_n\}, \quad A_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

7. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi notăm cu $L_i \in \{0, 1\}^n$ vectorul caracteristic al mulţimii B_i ($L_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_j = 1$ dacă $a_j \in B_i$ şi $\alpha_j = 0$ dacă $a_j \notin B_i$). Notăm cu $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\{0, 1\})$ matricea cu liniile $L_1, L_2, \ldots, L_m$.

Condiţia din problemă spune că pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i \neq j$, există o linie L_k astfel ca pe poziţiile i şi j să avem 1. Faptul că această linie este unică înseamnă că produsul (scalar) al coloanelor C_i şi C_j este 1. Astfel se sugerează ideea de a considera matricea $M^t \cdot M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ pentru care $M^t \cdot M = P = [p_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$ unde $p_{ij} = C_i C_j$ (produsul coloanelor C_i şi C_j). Conform observaţiei făcute $p_{ij} = 1$, oricare ar fi $i \neq j$ şi $p_{ii} \geq 1$, $i = \overline{1, n}$. Arătăm că $p_{ii} \geq 2$, $i = \overline{1, n}$. Dacă am avea un $p_{ii} = 1$, ar însemna că pe coloana C_i avem un singur element nenul, deci un anumit element a_j se găseşte într-o singură mulţime B_k; atunci, din condiţia dată pentru orice alt element a_{j_1}, există o mulţime care conţine pe a_j şi pe a_{j_1}, deci această mulţime este B_k; în concluzie B_k ar conţine toate elementele din A, în contradicţie cu faptul că B_k este submulţime proprie. Astfel $M^t \cdot M = D + J$ unde D este o matrice diagonală cu elementele diagonalei strict pozitive şi J

este matricea cu toate elementele egale cu 1. Se arată uşor că determinantul matricei $M^t \cdot M$ este strict pozitiv (mai mult matricea este pozitiv definită:

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + (x_1 + \ldots + x_n)^2,$$

unde $d_i > 0$, $i = \overline{1,n}$).

În concluzie, $\operatorname{rang} M^t \cdot M = n$, deci $\operatorname{rang} M \geq n$ şi deoarece $\operatorname{rang} M \leq m$ rezultă $m \geq n$.

8. Considerăm matricea $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\{0,1\})$ care are pe liniile $L_1, L_2, \ldots, L_n$ vectorii caracteristici ai mulţimilor $B_1, B_2, \ldots, B_m$ şi notăm cu G matricea pătratică $G = M \cdot M^t \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Elementele sale sunt $g_{ij} = L_i \cdot L_j$ (produsul (scalar) al liniilor L_i şi L_j) şi se observă că $g_{ij} = |B_i \cap B_j| = k$, unde $i \neq j$ şi evident $g_{ii} = |B_i| \geq k$, $i = \overline{1,n}$. Dacă notăm $g_{ii} = k + b_i$, $i = \overline{1,n}$, arătăm că un singur b_i poate fi 0, iar ceilalţi sunt strict pozitivi: dacă prin absurd $b_1 = b_2 = 0$ atunci B_1 şi B_2 au fiecare câte k elemente şi, doarece $B_1 \neq B_2$, rezultă că $B_1 \cap B_2$ are mai puţin de k elemente (contradicţie).

Determinantul matricei G este:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} k+b_1 & k & k & \ldots & k \\ k & k+b_2 & k & \ldots & k \\ k & k & k+b_3 & \ldots & k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k & k & k & \ldots & k+b_n \end{vmatrix}$$

care verifică relaţia de recurenţă $\Delta_m = k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} + b_n \Delta_{n-1}$ şi, în final:

$$\Delta_m = \prod_{k=1}^{m} b_k + k \left(\prod_{k \neq 1} b_k + \prod_{k \neq 2} b_k + \ldots + \prod_{k \neq n} b_k \right) > 0,$$

deci matricea $G = M \cdot M^t$ are rangul m şi cum $\operatorname{rang} M \geq \operatorname{rang} G$ şi $\operatorname{rang} M \leq n$ obţinem $n \geq m$.

9. Vom trece de la numere întregi la clase de resturi modulo 2. Numerele pare se înlocuiesc cu $\widehat{0}$ şi cele impare cu $\widehat{1}$ ca elemente ale corpului $\mathbb{Z}_2$. Problema cere să arătăm că există liniile $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_k}$ cu suma:

$$\widehat{L}_{i_1} + \widehat{L}_{i_2} + \ldots + \widehat{L}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}).$$

Liniile pot fi privite ca elemente ale spaţiului vectorial $\mathbb{Z}_2^n$ care este spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul $\mathbb{Z}_2$. Deoarece $m > n$, liniile sunt liniar dependente, deci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ astfel ca:

$$\alpha_1 \widehat{L}_1 + \alpha_2 \widehat{L}_2 + \ldots + \alpha_m \widehat{L}_m = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}).$$

Dacă în relaţia de mai sus nu scriem coeficienţii $\widehat{0}$ şi rămân doar $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_k} = \widehat{1}$ obţinem:

$$\widehat{L}_{i_1} + \widehat{L}_{i_2} + \ldots + \widehat{L}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \ldots, \widehat{0}).$$

10. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şi, pentru fiecare submulţime A_i, definim vectorul său caracteristic $v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$, unde $x_{ij} = 1$ dacă $a_j \in A_i$ şi $x_{ij} = 0$ dacă $a_j \notin A_i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Observăm că vectorul caracteristic al mulţimii $A_{i_1} \Delta A_{i_2}$ este suma modulo 2 a vectorilor V_{i_1} şi V_{i_2}.

Considerăm numerele 0 şi 1 ca elemente ale corpului $\mathbb{Z}_2$, renotate $\widehat{0}$ şi $\widehat{1}$, iar vectorii v_i ca elemente ale spaţiului vectorial $\mathbb{Z}_2^n$, care este spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul $\mathbb{Z}_2$. Problema astfel reformulată cere să arătăm că există vectorii caracteristici $\widehat{v}_{i_1}, \widehat{v}_{i_2}, \dots, \widehat{v}_{i_k}$ cu suma zero:

$$\widehat{v}_{i_1} + \widehat{v}_{i_2} + \ldots + \widehat{v}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \dots, \widehat{0}).$$

Având $m > n$ vectori (caracteristici) într-un spaţiu vectorial de dimensiune n ($\mathbb{Z}_2^n$) rezultă că ei sunt liniar dependenţi. Există deci scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ astfel ca:

$$\alpha_1 \widehat{v}_1 + \alpha_2 \widehat{v}_2 + \ldots + \alpha_m \widehat{v}_m = (\widehat{0}, \widehat{0}, \dots, \widehat{0}).$$

Dacă în relaţia de mai sus nu mai scriem coeficienţii $\widehat{0}$ şi rămân doar coeficienţii egali cu $\widehat{1}$, $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_k} = \widehat{1}$ obţinem:

$$\widehat{v}_{i_1} + \widehat{v}_{i_2} + \ldots + \widehat{v}_{i_k} = (\widehat{0}, \widehat{0}, \dots, \widehat{0}),$$

adică:

$$A_{i_1} \Delta A_{i_2} \Delta \ldots \Delta A_{i_k} = \emptyset.$$

11. Notăm cu $L_i \in \{0, 1\}^n$ vectorul caracteristic al mulţimii B_i, $i = \overline{1, m}$ şi notăm cu $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\{0, 1\})$ matricea cu liniile $L_1, L_2, \dots, L_m$. Matricea pătratică $G = M \cdot M^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are pe diagonală numere impare şi în afara diagonalei numere pare ($g_{ij} = |B_i \cap B_j|$). Trecând la clasa modulo 2, în $\mathbb{Z}_2$ matricea $\widehat{G}$ este matricea unitate $\widehat{I}_m$ cu determinantul nenul. G fiind matricea *Gram* a vectorilor $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \dots, \widehat{L}_m$ rezultă că vectorii $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \dots, \widehat{L}_m$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{Z}_2^n$ şi atunci $m \leq n$.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, G. Dospinescu, *Problems from the Bock*, XYZ Press, 2008.
[2] J. D. Beasley, *The Mathematics of Games*, Oxford Univ. Press, 1989.
[3] M. Eigen, R. Winkler, *Law of the Games*, Princeton Univ. Press, 1981.
[4] M. Kaitchik, *Mathematical Recreations*, W. W. Norton, 1942.
[5] L. Babai, P. Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, Dep. Comput. Sci. Univ. Chicago, 1992.
[6] B. Lindstrom, *Another theorem of families of sets*, Ars Combinatorica, 35(1993), 123-124.
[7] O. Pikhurko, *Algebraic Methods in Combinatorics*.

Asupra teoremei lui Beatty, şirurilor lui Wythoff şi cuvântului lui Fibonacci

ADRIAN REISNER[1)]

Abstract. *Beatty*'s theorem establishes an equivalence relation so that the sets $\{[n\alpha], n \in \mathbb{N}^*\}$ and $\{[n\beta], n \in \mathbb{N}^*\}$ form a disjoint union of $\mathbb{N}^*$, for $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. The case of *Wythoff*'s pairs is a specific case of *Beaty*'s theorem with $\alpha = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (the golden ratio) and allows us to define the golden semigroup (or *Wythoff*'s semigroup) and on the other hand the *Fibonacci* word. The latter, the sturmian characteristic word of slope $\dfrac{1}{\rho^2}$, is also obtained as the fixed point of the morphism $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$ in the free monoid of base $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Finally, the *Fibonacci* word allows us to determine a winning strategy for *Rufus Issac*'s Nim game (or *Wythoff*'s game).

Keywords: *Beatty* theorem, *Zeckendorf* representation, Ecuaţii *Sturm - Liouville*, Combinatorics on words.

MSC : 11A67, 68R15.

I. Partiţiile mulţimii $\mathbb{N}^*$

Fiind dat numărul real α notăm cu $E(\alpha)$ mulţimea:

$$E(\alpha) = \{[n\alpha], n \in \mathbb{N}^*\},$$

unde $[\alpha]$ este partea întreagă a numărului real α. Avem atunci teorema următoare:

Teorema 1. *Fiind date trei numere reale $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, mulţimiile $E(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$ nu pot forma o partiţie a mulţimii $\mathbb{N}^*$.*

Demonstraţie. Presupunem că $\mathbb{N}^*$ este reuniunea mulţimiilor $E(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$, disjuncte. Avem $[\alpha_1] = 1$ căci, în cazul contrar, 1 nu ar aparţine nici unui $E(\alpha_i)$ ceea ce este exclus. Fie $\alpha_1 = 1 + \varepsilon$ unde $0 \leq \varepsilon < 1$ şi fie $r > 1$ cel mai mic întreg neaparţinând mulţimii $E(\alpha_1)$; avem $[\alpha_1] = r$ i.e. $r \leq \alpha_2 < r + 1$. Avem atunci $[(r-1)\alpha_1] = r - 1$ şi $[r\alpha_1] = r + 1$ ţinând seama de definiţia întregului r. Deducem imediat: $(r-1)\alpha_1 < r$ şi $r\alpha_1 \geq r + 1$, de unde $1 + \dfrac{1}{r} \leq \alpha_1 < 1 + \dfrac{1}{r-1}$, fie $\dfrac{1}{r} \leq \varepsilon < \dfrac{1}{r-1}$.

Deci $1 \leq \alpha_1 < 2$, $\alpha_i > 1$, $i = 2, 3$, implică faptul că dacă $m \notin E(\alpha_1)$ atunci $m - 1 \in E(\alpha_1)$, $m + 1 \in E(\alpha_1)$ şi avem mai precis lema următoare:

Lema 2. *Dacă $m \notin E(\alpha_1)$ atunci:*

– fie $\{m+1, m+2, \ldots, m+r-1\} \in E(\alpha_1)$ şi $m + r \notin E(\alpha_1)$,

– fie $\{m+1, m+2, \ldots, m+r\} \in E(\alpha_1)$ şi $m + r + 1 \notin E(\alpha_1)$.

Demonstraţie. Dacă $m \notin E(\alpha_1)$ atunci:

$$m - 1 \leq t\alpha_1 < m < m + 1 \leq (t+1)\alpha_1$$

[1)]Centrul de calcul E.N.S.T. Paris, `Adrien.Reisner@enst.fr`

şi deci:

$$[t\alpha_1] = m - 1;$$

$$[(t+1)\alpha_1] = m + 1 \Rightarrow (t+1)\alpha_1 = m + 1 + \varphi;$$

$$t\alpha_1 + \alpha_1 = t\alpha_1 + 1 + \varepsilon = m + 1 + \varphi \Rightarrow \varepsilon - \varphi = m - t\alpha_1 > 0,\ \varepsilon > \varphi;$$

$$[(t+2)\alpha_1] = m + 2 \Rightarrow (t+2)\alpha_1 = m + 2 + \varphi + \varepsilon,\ \varphi + \varepsilon < 1;$$

$$[(t+3)\alpha_1] = m + 3 \Rightarrow (t+3)\alpha_1 = m + 3 + \varphi + 2\varepsilon,\ \ \varphi + 2\varepsilon < 1; \ldots$$

Fie s cel mai mic întreg verificând $\varphi + (s-1)\varepsilon \geq 1$ i.e. $m + s - 1 \in E(\alpha_1)$ şi $m + s \notin E(\alpha_1)$. Dacă $s \leq r - 1$, atunci avem, deoarece $\varepsilon > \varphi$:

$$\varphi + (s-1)\varepsilon < s\varepsilon \leq (r-1)\varepsilon < 1,$$

ceea ce este imposibil.

Pentru $s = r + 1$ avem $\varphi + (s-1)\varepsilon = \varphi + r\varepsilon \geq 1$, de unde rezultă lema.

În mod analog avem:

Lema 3. *Dacă $u \in E(\alpha_2)$ atunci următorul element din $E(\alpha_2)$ este $u + r$ sau $u + r + 1$.*

Cele două leme precedente conduc, mulţimile $E(\alpha_1)$ şi $E(\alpha_2)$ fiind disjuncte, la:

$$E(\alpha_1) \cup E(\alpha_2) = \mathbb{N}^*,$$

ceea ce incheie demonstraţia teoremei 1.

II. Cuvântul caracteristic şi teorema lui Beatty

Considerăm mulţimea $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ numită **alfabet**. Se numeşte **cuvânt** asupra mulţimii $\mathcal{A}$ orice şir finit sau infinit $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, unde $x_i \in \mathcal{A}$. Mulţimea cuvintelor peste alfabetul $\mathcal{A}$ înzestrată de operaţia binară de **concatenare** (sau produs) este un **monoid** având pentru element neutru **cuvântul vid** notat ε. Acest monoid se numeşte monoidul **liber** de bază $\mathcal{A}$ (vezi [4]). Pentru $\theta \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, considerăm cuvântul infinit al lui *Christoffel* definit prin: $CR(\theta) = c_0 c_1 \ldots c_n \ldots$, unde $c_n = [(n+1)\theta] - [n\theta]$ pentru $n \in \mathbb{N}$, iar θ este panta cuvântului. Acest cuvânt este de forma $CR(\theta) = c_0 C(\theta)$, unde cuvântul $C(\theta) = c_1 \ldots c_n \ldots$ este **cuvântul caracteristic** de aceeaşi pantă θ (vezi [5]).

Ţinând seama de teorema 1, sunt necesare două mulţimi de tipul $E(\alpha)$ pentru a realiza o partiţie a mulţimii $\mathbb{N}^*$. În articolul „Partiţii ale mulţimii numerelor naturale" din Gazeta Matematică seria B nr. 3/2006 (paginile 113-121) autorii *Vasile Pop* şi *Viorel Lupşor* demonstrează următoarea teoremă – pagina 113 – cunoscută sub numele de „**Teorema lui Beatty**" în memoria matematicianului canadian *Samuel Beatty* (1881-1970).

Teorema 4. *Cu notaţiile precedente pentru $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ verificând $a > 1$ şi $b > 1$, următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

a) *$\mathbb{N}^*$ este reuniune disjunctă a mulţimilor $E(a)$ şi $E(b)$*;

b) *$a \notin \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.*

Ne propunem aici să demonstrăm teorema lui *Beatty* utilizând proprietăţile cuvântului caracteristic.

Considerând cuvântul caracteristic $C(\theta)$ de pantă $\theta = \dfrac{1}{a}$ avem, cu notaţile precedente:

Lema 5. *Următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

i) $c_k = 1$, ii) $k \in E(a)$

i.e. funcţia $\mathcal{F}[E(a)] : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$, $n \mapsto c_n$, *este funcţia caracteristică a submulţimii* $E(a) \subset \mathbb{N}^*$.

Demonstraţie. Să demonstrăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\operatorname{card}\{E(a) \cap [1,k]\} = [(k+1)\theta].$$

Într-adevăr:

$$\operatorname{card}\{E(a) \cap [1,k]\} = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid [na] < k+1\} =$$
$$= \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \left[\frac{n}{\theta}\right] < k+1\right\} = \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{n}{\theta} < k+1\right\} =$$
$$= \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid n < (k+1)\theta\} = [(k+1)\theta], \quad \text{c.c.t.d.}$$

Avem, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$:

$$c_k(\theta) = [(k+1)\theta] - [k\theta] = \operatorname{card}\{E(a) \cap [1,k]\} - \operatorname{card}\{E(a) \cap [1,k-1]\}.$$

Dacă această diferenţă este egală cu 1, atunci $k \in E(a)$, iar dacă este egală cu zero, atunci $k \notin E(a)$. Astfel, lema este demonstrată.

Fiind dat cuvântul infinit $C(\theta) = c_1c_2\ldots c_n\ldots$, notăm cu $\overline{C}(\theta)$ cuvântul infinit definit prin $\overline{C}(\theta) = \overline{c_1}\,\overline{c_2}\ldots\overline{c_n}\ldots$, unde $\overline{c_i} = 1 - c_i \in \{0,1\}$. Avem atunci:

Lema 6. *Pentru orice* θ *iraţional verificând* $0 < \theta < 1$, *avem*:

$$\overline{C}(\theta) = C(1-\theta).$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă θ este iraţional verificând $0 < \theta < 1$, avem pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n(1-\theta) = [(n+1)(1-\theta)] - [n(1-\theta)] = [(n+1) - (n+1)\theta] - [n - n\theta] =$$
$$= 1 - \{[(n+1)\theta] - [n\theta]\} = 1 - c_n(\theta) = \overline{c_n}(\theta),$$

$\overline{C}(\theta) = C(1-\theta)$ c.c.t.d.

Observaţie. Avem deci, ţinând seama de lema precedentă :

$$\mathcal{F}[\overline{E(a)}] = 1 - \mathcal{F}[E(a)].$$

Presupunând mulţimile $E(a)$ şi $E(b)$ disjuncte, unul din cele două numere reale a şi b sunt iraţionale căci, dacă $a = \dfrac{p}{q}$ şi $b = \dfrac{p'}{q'}$ ar fi trebuit să avem:

$$[p'q\alpha] = [pq'\beta] = pp' \in E(a) \cap E(b),$$

ceea ce este absurd.

Deducem atunci echivalenţa celor trei aserţiuni:
a) $\mathbb{N}^*$ este reuniune disjunctă a lui $E(a)$ şi $E(b)$;
a′) $C\left(\frac{1}{a}\right) = \overline{C}\left(\frac{1}{b}\right) = C\left(1 - \frac{1}{b}\right)$ i.e.

$$\mathcal{F}[E(a)] = \mathcal{F}[\overline{E(b)}] = 1 - \mathcal{F}[E(b)];$$

b) $a \notin \mathbb{Q}$, $b \notin \mathbb{Q}$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$
Astfel teorema lui *Beatty* este demonstrată.

Caz particular. Pentru $a = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $[b = \varphi^2]$ teorema lui *Beatty* arată că cele două submulţimi :

$$E_0 = E(\varphi) = \{[n\varphi],\ n \in \mathbb{N}^*\} \text{ şi } E_1 = E(\varphi^2) = \{[n\varphi^2],\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

formează o partiţie a mulţimii $\mathbb{N}^*$. Aceste două submulţimi se numesc *şirurile lui Wythoff*:

$$E_0 = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, \ldots\};$$

$$E_1 = \{2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, 49, 52, \ldots\}.$$

Cuvântul caracteristic de pantă $\frac{1}{\varphi^2}$ fiind $C\left(\frac{1}{\varphi^2}\right) = c_1c_2\ldots c_n\ldots$, $C\left(\frac{1}{\varphi^2}\right) = 0100101001001\ldots$, funcţia $n \mapsto c_n$ este funcţia caracteristică a submulţimii $E_1 = E\left(\varphi^2\right) \subset \mathbb{N}^*$.

Ne propunem să demonstrăm două proprietăţi interesante ale şirurilor lui *Wythoff* .

III. Şirurile lui Wythoff

A. Şirurile lui Wythoff şi sistemul de numerotaţie al lui Fibonacci

Şirul lui *Fibonacci* este definit prin: $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ şi $F_{n+1} = F_n + F_{n+1}$, $n > 0$.

Avem teorema:

Teorema 7 (Zeckendorf). *Orice număr* $n \in \mathbb{N}$ *se scrie în mod unic sub forma* $n = \sum_{i\geq 0} n_iF_i$, *unde* $n_i \in \{0,1\}$ şi $n_in_{i+1} = 0$, *pentru orice întreg* $i \geq 0$. *Notaţia lui Fibonacci este* $Fib(n) = n_kn_{k-1}\ldots n_0$.

$$\sum_{p=0}^{n} F_{2p} + 1 = F_{2n+1}; \qquad \sum_{p=1}^{n} F_{2p+1} + 1 = F_{2n+2}. \qquad (*)$$

Sistemul de numerotaţie al lui Fibonacci. -

Sistemul de numerotaţie al lui *Fibonacci* este un caz particular al sistemului de numerotaţie al lui *Ostrowski* (vezi [1]) sistem care are pentru bază numitorii convergenţilor în dezvoltarea unui număr real în fracţii continue.

Lema 8. *Fie* $(n_0, n_1, \dots, nk)$, *unde* $n_i \in \{0,1\}$ *şi* $n_i n_{i+1} = 0$ *pentru orice* $i \geq k-1$. *Atunci*:

$$\sum_{0\leq i\leq k} n_i F_i < F_{k+1}.$$

Demonstraţie. Demontrăm această lemă prin inducţie. Pentru $k=0$ este evident. Putem presupune că $n_k = 1$ deşi $n_{k-1} = 0$. Din ipoteza de inducţie avem:

$$\sum_{0\leq i\leq k} n_i F_i = F_k + \sum_{0\leq i\leq k-2} n_i F_i < F_k + F_{k-1} = F_{k+1}, \text{c.c.t.d.}$$

Să demontrăm atunci teorema 7.

Unicitate. Presupunem existenţa a două şiruri distincte (n_i) şi (n'_i) verificând proprietăţile date şi $\sum\limits_{0\leq i\leq k} n_i F_i = \sum\limits_{0\leq i\leq k} n'_i F_i$. Simplificând termenii de indice superior, se poate presupune $n_k = 1$ şi $n'_k = 0$. În acest caz, prima sumă ar fi minorată de F_k, iar a doua sumă ar fi strict majorată de F_k ţinând seama de lema precedentă – ceea ce este absurd.

Existenţa. Proprietatea este verificată pentru $0 = 0F_0$, $1 = 1F_0$, $2 = 1F_1$. Presupunem existenţa acestei forme pentru orice $n < F_k$ unde $k \geq 2$ şi fie n un întreg verificând $F_k \leq n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Considerăm $n' = n - F_k < F_{k-1}$. Prin ipoteza de inducţie, n' poate să se scrie sub forma $n' = \sum\limits_{0\leq i\leq k-2} n_i F_i$. Obţinem atunci $n = F_k + \sum\limits_{0\leq i\leq k-2} n_i F_i$, de unde rezultă prima parte a teoremei.

Notând cu $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} F_{n-2i}$, să demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n > 1$, avem $\sigma_{n+1} = F_{n+1}$. Pentru $n = 0, 1$ se utilizează relaţiile de definiţie ale şirului lui *Fibonacci.*

Într-adevăr, verificată pentru $n = 2$, presupunem relaţia precedentă adevărată pentru orice $j \leq n$. Avem atunci:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n-1} + F_{n+1} = F_n - 1 + F_{n+1} = F_{n+2} - 1,$$

i.e. relaţia este verificată pentru ordinul $n+1$ ceea ce încheie inducţia.

Pentru n par, respectiv impar, se obţin cele două relaţii din teorema 7.

Utilizând această teoremă se pot caracteriza cele două şiruri ale lui *Wythoff*:

Teorema 9. *Cu notaţiile precedente avem*:

a) $n \in E_0 \Leftrightarrow Fib(n-1)$ *se termină cu* 0;

b) $n \in E_1 \Leftrightarrow Fib(n-1)$ *se termină cu* 1.

Demonstraţie. Ecuaţia caracteristică a şirului lui *Fibonacci*:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

admite ca rădăcini $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $\theta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$. Ţinând seama de proprietatea şirurilor recurente există k, k' reali astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $F_n = k\varphi^n + k'\theta^n$. Considerând cazurile $n = 0$ şi $n = 1$, obţinem $k = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$ şi $k' = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}$ şi, în final:

$$F_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\varphi^n - \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\theta^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \theta^{n+2}\right).$$

a) În continuare, deorece $\varphi\theta = -1$, avem:

$$F_n\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+3} + \theta^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+3} - \theta^{n+3}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\theta^{n+3} + \theta^{n+1}\right) =$$

$$= F_{n+1} + \theta^{n+1}\left(\frac{\theta^2+1}{\sqrt{5}}\right) = F_{n+1} - \theta^{n+2}.$$

Fiind dat $n = \sum\limits_{i\geq 0} n_i F_i$, notăm cu $\pi(n) = \inf\{i \mid n_i = 1\}$. Ţinând seama de cele precedente avem $n\varphi = \sum\limits_{i\geq 0} n_i F_{i+1} + r(n)$ unde $r(n) = -\sum\limits_{i\geq 0} n_i\theta^{i+2}$.

Cu $n_i n_{i+1} = 0$ obţinem: în expresia lui $r(n)$ singurele puteri care intervin sunt puterile lui θ având aceeaşi paritate cu $\pi(n)$.

– Dacă $\pi(n)$ este par, $Fib(n)$ se termină cu un număr par de 0. Pe de altă parte:

$$0 > r(n) = -\sum_{\substack{i\geq 0\\ i \text{ par}}} n_i\theta^{i+2} > -\left(\theta^2 \ldots + \theta^{2k} \ldots\right) = -\frac{1}{\varphi}$$

şi obţinem $[n\varphi] + 1 = \ldots + F_{\pi(n)+1}$ deci $Fib([n\varphi]+1)$ se termină printr-un număr impar de 0 de unde $Fib([n\varphi])$ se termină prin 01 – vezi formulele $(*)$ din teorema 7 – şi, în final, $Fib([n\varphi]-1)$ se termină cu 00.

– Dacă $\pi(n)$ est impar, $Fib(n)$ se termină cu un număr impar de 0. În acest caz avem:

$$0 < r(n) = -\sum_{\substack{i\geq 0\\ i \text{ impar}}} n_i\theta^{i+2} < -\left(\theta + \theta^3 + \ldots + \theta^{2k+1} + \ldots\right) = 1.$$

Utilizând un raţionament analog cu cel precedent, obţinem – cu formulele $(*)$ – că $Fib([n\varphi]-1)$ se termină cu 0. În final, obţinem:

$$n \in E_0 \Rightarrow Fib(n-1) \text{ se termină cu } 0.$$

b) În mod analog:

$$n \in E_1 \Rightarrow Fib(n-1) \text{ se termină cu } 1,$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei 9 caracterizând cele două şiruri *Wythoff*.

B. Semigrupul lui Wythoff

Considerăm aici mulţimea matricilor pătratice de odinul 2 definit astfel:

$$\mathcal{B} = \left\{ W_n = \begin{pmatrix} n & a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

unde $a_n = [n\varphi]$, $b_n = [n\varphi^2]$ i.e. al n-lea a_n (respectiv b_n) este termen al şirului lui *Withoff* E_0 (respectiv E_1) şi mulţimea de vectori:

$$\mathcal{W} = \left\{ w_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}. \tag{1}$$

Fie $\mathcal{G}$ mulţimea matricilor M pătratice de ordinul 2 având coeficienţii întregi strict pozitivi şi verificând : oricare ar fi $w_n \in \mathcal{W}$, $Mw_n \in \mathcal{W}$.

Ne propunem să demonstrăm următoarea:

Teorema 10. *Mulţimea $\mathcal{B}$ este un semigrup comutativ pentru multiplicarea matricilor*:

$$W_n W_m = W_{nm+a_n a_m}.$$

Avem nevoie de:

Lema 11. *Avem*:

a) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, (p,q) \in \mathbb{N}^{*2},\ p = [(q-p)\varphi] \right\}$;

b) $\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, (p,q) \in \mathbb{N}^{*2},\ 0 \le q - p\varphi < \dfrac{1}{\varphi} \right\}$;

c) *Dacă* $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, *atunci* $\dfrac{\gamma + \delta\varphi}{\alpha + \beta\varphi} = \varphi$ *şi* M *este de forma* $M = \begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$;

d) *Pentru* $M = \begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, $\beta, \delta \in \mathbb{N}^*$, $\delta \ge \beta$, *avem echivalenţa*:

$$\text{i) } M \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \text{ii) } 0 < \delta - \beta\varphi < 1.$$

Demonstraţie (1) $\Rightarrow$ a): $\left[n\varphi^2\right] = [n\varphi + n] = [n\varphi] + n$. Presupunând $\mathcal{W}$ definit de (1), avem deci: $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$ i.e. $p = [n\varphi]$, $q = \left[n\varphi^2\right] \Rightarrow q - p = n$ şi $p = [n\varphi] = [(q-p)\varphi]$ c.c.t.d.

a) $\Rightarrow$ (1): Invers, dacă notăm $q - p = n$ avem $n \ge 1$ căci:

$1 \le p = [n\varphi] \le n\varphi$, $p = [n\varphi]$, $q = n + p = n + [n\varphi] = \left[n\varphi^2\right]$ c.c.t.d.

a) $\Rightarrow$ b): Avem: $p = [(q-p)\varphi] \le (q-p)\varphi < p + 1$ de unde:

$0 \le q\varphi - p(\varphi + 1) = q\varphi - p\varphi^2 = \varphi(q - p\varphi) < 1$ şi $0 \le q - p\varphi < \dfrac{1}{\varphi}$ ($0 = q - p\varphi$ este exclus, $\sqrt{5}$, φ fiind iraţionali);

b) $\Rightarrow$ a): Presupunând că $0 \leq q - p\varphi < \dfrac{1}{\varphi}$ avem: $0 \leq q\varphi - p(\varphi+1) < 1$ şi $p < (q-p)\varphi < p+1$, deci $p = [(q-p)\varphi]$ c.c.t.d.

c) Fie $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$, $M\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. Ţinând seama de b):

$\varphi < \dfrac{q}{p} < \varphi + \dfrac{1}{p\varphi}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q}{p} = \varphi$ şi la fel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q}{P} = \varphi$, deci:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma p + \delta q}{\alpha p + \beta q} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma + \delta \frac{q}{p}}{\alpha + \beta \frac{q}{p}} = \frac{\gamma + \delta\varphi}{\alpha + \beta\varphi}, \text{ unde } [\alpha + \beta\varphi > 0] \text{ c.c.t.d.}$$

Atunci: $0 = \varphi(\alpha + \beta\varphi) - (\gamma + \delta\varphi) = (\alpha + \beta - \delta)\varphi + (\beta - \gamma)$. Dacă $\alpha + \beta - \delta \neq 0$ am fi avut $\varphi = \dfrac{\beta - \gamma}{\alpha + \beta - \delta} \in \mathbb{Q}$ ceea ce este imposibil; rezultă $\alpha = \delta - \beta$ şi $\gamma = \beta$, c.c.t.d.

Observaţie. Mulţimea matricilor $M = \begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, unde $\beta, \delta, \delta - \beta \in \mathbb{N}$, este un monoid comutativ pentru multiplicarea matricilor, cu verificare imediată.

d) i) $\Rightarrow$ ii): $M \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$, $M\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$. Avem:

$$\frac{Q - P\varphi}{\delta - \beta\varphi} = \frac{\beta p + \delta q - (\delta - \beta)p\varphi - q\beta\varphi}{\delta - \beta\varphi} = q - p\frac{\delta\varphi - \beta(1+\varphi)}{\delta - \beta\varphi} = q - p\varphi.$$

Notând cu $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem, atunci, imediat, prin inducţie: $Q - P\varphi = (\delta - \beta\varphi)^n(2-\varphi)$; fie $0 < (\delta - \beta\varphi)^n = \dfrac{Q - P\varphi}{2 - \varphi} < \dfrac{1}{\varphi(2-\varphi)} = \dfrac{1}{\varphi - 1} = \varphi$. Dacă $\delta - \beta\varphi > 1$ se obţine o absurditate făcând $n \to \infty$. În final $0 < \delta - \beta\varphi < 1$, φ fiind iraţional .

ii) $\Rightarrow$ i): Dacă $0 < \delta - \beta\varphi < 1$ şi $\begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, cu $0 < q - p\varphi < \dfrac{1}{\varphi}$, atunci $Q - P\varphi = (\delta - \beta\varphi)(q - p\varphi) \in \left(0, \dfrac{1}{\varphi}\right)$, deci, ţinând seama de b), avem $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$, i.e. $M = \begin{pmatrix} \delta - \beta & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, c.c.t.d.

Lema este complet demonstrată.

Deducem, din aserţiune b) a lemei:

$$\mathcal{B} = \left\{ W_n = \begin{pmatrix} n & a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathcal{G}.$$

În particular, oricare ar fi $w_m \in \mathcal{W}$ şi oricare ar fi $W_n \in \mathcal{B}$: $W_n(w_m) \in \mathcal{B}$ (a 2-a coloană a produsului W_nW_m)

$$\left[W_nW_m = \begin{pmatrix} q-p & p \\ p & q \end{pmatrix}\right]$$

şi, în final, se obţine – vezi observaţia precedentă – teorema 10.

Mulţimea $\mathcal{W}$ înzestrată de operaţia internă astfel definită:

$$w_n \cdot w_m = w_{n \cdot m}, \quad \text{unde} \quad n \cdot m = nm + a_n a_m,$$

este un semigrup comutativ izomorf semigrupului $(\mathcal{B}, \times)$.

IV. Cuvântul lui Fibonacci

Considerăm aici alfabetul $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pentru noţiunile introduse aici vezi [4] capitolul 8 şi [5] capitolele I, II.

Teorema 12. $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, d)$, *unde d este definit prin $d(u, u') = 0$ dacă $u = u'$ şi $d(u, u') = \exp(-\inf\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq u'_n\})$ dacă $u \neq u'$, este un spaţiu metric compact, deci complet.*

Demonstraţie. Să demonstrăm că d este o distanţă ultrametrică i.e. o metrică verificând $d(x, z) \leq \sup(d(x, y), d(x, z))$ pentru orice $x, y, z \in \mathcal{A}^*$. $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$; d este simetrică. Să demonstrăm inegalitatea ultrametrică . Presupunem cuvântul y diferit de cuvântul x pentru $n \geq i_0$ şi de cuvântul z pentru $n \geq j_0$. Distingem două cazuri: $i_0 \neq j_0$; fie $i_0 < j_0$; atunci x diferă de z pentru $n \geq i_0$ i.e. $d(x, z) = d(x, y)$; dacă $i_0 = j_0$ cuvintele x şi z au aceleaşi litere cel puţin până la rangul i_0, deci : $d(x, z) < d(x, y)$. c.c.t.d.

Bilele deschise pentru această distanţă sunt mulţimile cuvintelor având primele n litere fixate. Topologia definită de această distanţă d este topologia produs peste $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Alfabetul $\mathcal{A}$ fiind finit, $\mathcal{A}$ este compact. Teorema lui *Tyhonov* asigură atunci că $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, produs de spaţii compacte, este compact c.c.t.d.

Considerăm şirul de cuvinte peste alfabetul $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ definit astfel:

$\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 01$ şi $\Phi_{n+1} = \Phi_n\Phi_{n-1}$ pentru $n > 1$.

Propoziţia 13. *Şirul de cuvinte $(\Phi_n 000 \ldots 0 \ldots)_{n \geq 0}$ este convergent în spaţiul $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, d)$ spre cuvântul $\lambda = \lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_n \ldots$.*

Demonstraţie. Pentru orice $p \geq n$ cuvântul Φ_n este un prefix al cuvântului Φ_p (vezi definiţia şirului (Φ_n)). Şirul de cuvinte $(\Phi_n 000 \ldots 0 \ldots)$ este un şir *Cauchy*. Într-adevăr, $|\Phi_n| = F_n$ – imediat – deci cuvintele $\Phi_p 000 \ldots 0 \ldots$, pentru $p \geq n$, au toate cel puţin cele F_n prime litere identice. Pentru $p, q \geq n$ avem atunci:

$$d(\Phi_p 000 \ldots 0 \ldots, \Phi_q 000 \ldots 0 \ldots) \leq \exp(-F_n),$$

de unde propoziţia 13.

Definiţia 14. *Morfismul σ de $\mathcal{A}^*$ definit prin: $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$ este morfismul lui Fibonacci.*

Teorema 15. *Acest morfism σ admite un unic punct fix peste $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Acest punct fix este cuvântul $\lambda = \lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_n \dots$ definit în propoziţia* 13. *Acest cuvânt se numeşte cuvântul lui Fibonacci notat $\mathcal{F}ib$.*

Demonstraţie. Fie u şi u' două cuvinte distincte având pentru prefix cuvântul $u_0 \dots u_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dacă $n = 0$ atunci a este prima literă a imaginilor $\sigma(u)$ şi $\sigma(u')$.

Dacă $n > 0$ atunci imaginile $\sigma(u)$ şi $\sigma(u')$ au în comun cel puţin $n+1$ litere căci aceste două imagini admit pentru prefix de lungime $n+1$ cuvântul $\sigma(u_0)\sigma(u_1)\dots\sigma(u_{n-1})0$. Avem deci $d(\sigma(u), \sigma(u')) \leq \mathrm{e}^{-1} d(u, u') < d(u, u')$, prin urmare σ este o aplicaţie strict contractantă în spaţiul complet $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Deci σ admite un unic punct fix. Să arătăm că acest punct fix este cuvântul $\lambda = \lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_n \dots$ definit la propoziţia 13. Într-adevăr, să demonstrăm prin inducţie că $\Phi_n = \sigma^n(0)$. Este evident pentru $n = 0, 1$. Presupunând proprietatea verificată pentru ordinul $n \geq 1$, avem:

$$\sigma^{n+1}(0) = \sigma^n(01) = \sigma^n(0)\sigma^n(1) = \sigma^n(0)\sigma^{n-1}(0) = \Phi_n\Phi_{n-1} = \Phi_{n+1}.$$

Deducem că Φ_n este prefix al cuvântului $\sigma(\Phi_n)$; deci:

$$d\left(\Phi_n 000 \dots 0 \dots, \sigma\left(\Phi_n 000 \dots 0 \dots\right)\right) \leq \exp\left(-F_n\right).$$

Cu notaţia $u = \Phi_n 000 \dots 0 \dots$ la limită, $d(u, \sigma(u)) = 0$ (σ este continuă căci contractantă) i.e. $\lambda = \lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_n \dots$ este unicul punct fix al morfismului lui *Fibonacci* şi deci:

$$\mathcal{F}ib = 0100101001001010010100100101001001010\dots.$$

Teorema următoare este o altă caracterizare a şirurilor lui Wythoff:

Teorema 16. *Fiind dat cuvântul lui Fibonacci $\mathcal{F}ib = u_0u_1 \dots u_n \dots$ peste $\{0, 1\}$ avem echivalenţa următoare, unde E_0, E_1 sunt cele două şiruri al lui Wythoff: $u_n = 0 \Leftrightarrow n + 1 \in E_0$ (deci $u_n = 1 \Leftrightarrow n + 1 \in E_1$) i.e. $u_n = 0 \Leftrightarrow n \in \{[n'\varphi] - 1,\ n' \in \mathbb{N}^*\}$.*

Demonstraţie. Primele valori ale lui $Fib(n)$ şi ale lui u_n sunt următoarele :

n	$Fib(n)$	u_n	n	$Fib(n)$	u_n	n	$Fib(n)$	u_n
0	ε	0	8	10000	0	16	100100	0
1	1	1	9	10001	1	17	100101	1
2	10	0	10	10010	0	18	101000	0
3	100	0	11	10100	0	19	101001	1
4	101	1	12	10101	1	20	101010	0
5	1000	0	13	100000	0	21	1000000	0
6	1001	1	14	100001	1	22	1000001	1
7	1010	0	15	100010	0	23	1000010	0

Ţinând seama de teorema 9 este suficient să se arate echivalenţa:

$$u_n = 0 \Leftrightarrow Fib(n) \text{ se termină cu } 0.$$

Proprietatea este verificată pentru $n = 1, 2$. Fie $n \geq 3$. Dacă n aparţine şirului lui *Fibonacci* atunci $n = F_k$ unde $k \geq 2$ şi $\Phi_k 0$ este prefix al cuvântului $\Phi_k\Phi_{k-1}$, deci prefix al cuvântului $\mathcal{F}ib$; deducem $u_n = 0$. ($|\Phi_k| = F_k$ şi 0 este prefixul lui Φ_{k-1}.)

$n = \sum_{i=k\ldots 0} n_i F_i$ fiind forma lui n în baza lui *Fibonacci* avem $n = F_k + m$ unde $0 < m < F_{k-1}$. Să demonstrăm că $u_n = u_m$. Cuvântul $u = u_0 \ldots u_m$ este prefix al cuvântului Φ_{k-1} şi $\Phi_k u$ este prefix al lui $\Phi_k\Phi_{k-1}$ deci al cuvântului $\mathcal{F}ib$. Ultima literă a cuvântului $\Phi_k u$ este de rang $F_k + m = n$; în final, $u_n = u_m$ c.c.t.d.

Iterând procedeul se obţine proprietatea având $u_1 = 1$ şi $u_2 = 0$.

În tabloul precedent argumentul demonstraţiei este ilustrat din faptul că $Fib(12)$ se termină prin $Fib(4)$ căci $12 = F_4 + 4$ şi deci prefixul de lungime 5 al cuvântului lui *Fibonacci* precedat de cuvântul Φ_4 este încă un prefix al cuvântului $\mathcal{F}ib$.

Observaţie. Ţinând seama de lema 5 deducem că $\mathcal{F}ib$ este cuvântul caracteristic de pantă $\dfrac{1}{\varphi^2}$ (atenţie la indici – vezi cazul particular de la pagina 185:

$$\mathcal{F}ib = u_0 u_1 \ldots u_n \ldots = C\left(\frac{1}{\varphi^2}\right) = c_1 c_2 \ldots c_n \ldots .$$

V. Ecuaţii diferenţiale Sturm - Liouville

Pentru $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) - \mathbb{Q}$ fie $C(\alpha) = c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ cuvântul caracteristic de pantă α unde $c_n = [\alpha(n+1)] - [\alpha n]$ pentru ≥ 1. Pentru $n \in \mathbb{N}$, notând cu $\mu(n, \alpha) = \text{card}\{k \in \mathbb{N} \mid n < k\alpha < n+1\}$ avem, în mod evident:

$$C(\alpha) = 0^{\mu(0,\alpha)-1} 1 0^{\mu(1,\alpha)-1} 1 0^{\mu(2,\alpha)-1} 1 \ldots 1 0^{\mu(n,\alpha)-1} 1 \ldots$$

Dacă $\alpha' = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ $\left(\alpha = \dfrac{\alpha'}{1+\alpha'}\right)$ avem, cu notaţia precedentă :

Teorema 17. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ avem $\mu(n, \alpha) = \mu(n, \alpha') + 1$.

Demonstraţie. Într-adevăr, fie k şi k' întregi naturali astfel încât $n < k\alpha < n+1$, $n < k'\alpha' < n+1$. Deducem imediat $\dfrac{n}{\alpha} < k < \dfrac{n+1}{\alpha}$ şi $\dfrac{n}{\alpha} - n < k' < \left(\dfrac{n+1}{\alpha} - n\right) - 1$, de unde rezultă teorema.

Obţinem imediat corolarul:

Corolarul 18. *Cuvântul caracteristic* $C(\alpha)$ *de pantă* α *este de forma*:

$$C(\alpha) = 0^{\mu(0,\alpha')} 1 0^{\mu(1,\alpha')} 1 0^{\mu(2,\alpha')} 1 \ldots\ldots 1 0^{\mu(n,\alpha')} 1 \ldots .$$

Să considerăm ecuaţia diferenţială $y'' + \omega^2 y = 0$ unde $\omega = \pi\alpha'^{-1}$. O soluţie a acestei ecuaţii este funcţia $y = \sin(\omega t) = \sin(\pi\alpha'^{-1}t)$. (Matematicienii *Charles Francois Sturm* (1803-1855) şi *Joseph Liouville* (1809-1882) au studiat în 1836 rădăcinile ecuaţiilor diferenţiale omogene de gradul 2 de forma $y'' + \Psi(x)y = 0$ unde $\Psi(x)$ este o funcţie continuă de perioadă l (în particular o funcţie constantă)). Această funcţie $y = \sin(\pi\alpha'^{-1}t)$ este nulă pentru $\pi\alpha'^{-1}t = k\pi$, unde $k \in \mathbb{N}$, deci $t_k = k\alpha'$.

Fie $\theta(n)$ numărul rădăcinilor funcţiei $y = \sin(\pi\alpha'^{-1}t)$ în intervalul deschis $(n, n+l)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cu notaţiile precedente avem $\theta(n) = \mu(n, \alpha')$ şi corolarul 18 conduce atunci la teorema următoare:

Teorema 19. *Fiind dat cuvântul caracteristic $C(\alpha)$ de pantă α considerăm ecuaţia diferenţială omogenă $y'' + \pi^2\alpha'^{-2}y = 0$ unde $\alpha' = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. O soluţie fiind funcţia $y = \sin(\pi\alpha'^{-1}t)$, cuvântul $C(\alpha)$ este de forma $C(\alpha) = 0^{\theta(0)}10^{\theta(1)}10^{\theta(2)}1\dots10^{\theta(n)}1\dots$ unde $\theta(n)$ este numărul rădăcinilor acestei funcţii în intervalul deschis $(n, n+l)$.*

Exemplu. Pentru $\alpha = -2$, deci $\alpha' = -1$, se obţine cuvântul lui *Fibonacci* $C(\alpha) = \mathcal{F}ib$ – vezi observaţia precedentă. În acest caz ecuaţia diferenţială $y'' + \omega^2 y = 0$ unde $\omega = \pi\varphi$ admite ca soluţie funcţia $y = \sin(\pi\varphi t)$. Rădăcinile acestei funcţii sunt $t_k = k\varphi^{-1}$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Tabloul următor indică rădăcinile $t^k = k\varphi^{-1}$ ale funcţiei $y = \sin(\pi\varphi t)$ pentru $0 \le k \le 21$: $t_0 = 0$,

$$
\begin{array}{rr}
\rho^{-1} = 0,618033989\dots; & 2\rho^{-1} = 1,236067977\dots; \\
3\rho^{-1} = 1,854101966\dots; & 4\rho^{-1} = 2,472135955\dots; \\
5\rho^{-1} = 3,090169944\dots; & 6\rho^{-1} = 3,708203932\dots; \\
7\rho^{-1} = 4,326237921\dots; & 8\rho^{-1} = 4,944271910\dots; \\
9\rho^{-1} = 5,562305899\dots; & 10\rho^{-1} = 6,180339887\dots; \\
11\rho^{-1} = 6,798373876\dots; & 12\rho^{-1} = 7,416407865\dots; \\
13\rho^{-1} = 8,034441854\dots; & 14\rho^{-1} = 8,652475842\dots; \\
15\rho^{-1} = 9,270509831\dots; & 16\rho^{-1} = 9,888543820\dots; \\
17\rho^{-1} = 10,50657781\dots; & 18\rho^{-1} = 11,12461180\dots; \\
19\rho^{-1} = 11,74264579\dots; & 20\rho^{-1} = 12,36067977\dots; \\
\end{array}
$$
$$21\rho^{-1} = 12,97871376\dots.$$

Valorile lui $\theta(n)$ pentru $0 \le n \le 12$ sunt deci :

$\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 2$, $\theta(2) = 1$, $\theta(3) = 2$, $\theta(4) = 2$, $\theta(5) = 1$, $\theta(6) = 2$,
$\theta(7) = 1, \theta(8) = 2, \theta(9) = 2, \theta(10) = 1, \theta(11) = 2, \theta(12) = 2$ etc.

şi cuvântul lui *Fibonacci* este de forma următoare:

$$c(\alpha) = \mathcal{F}ib = 0^{\theta(0)}10^{\theta(1)}10^{\theta(2)}10^{\theta(3)}\dots10^{\theta(n)}10^{\theta(n+1)}\dots =$$
$$= 0100101001001010010100100101001001\dots.$$

Cuvintele caracteristice $C(\theta)$ al căror studiu a început în anii 1875 de către *Christoffel* şi *Markoff* (1882) se numesc **cuvintele caracteristice sturmiene**. Ele sunt un caz particular al **cuvintelor sturmiene** $s(\theta, \beta) = s_1 s_2 \dots s_n \dots$ unde $\theta \in (0,1) - \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{R}$ şi $s_n = [\theta(n+1) + \beta] - [\theta n + \beta]$.

Cuvintele sturmiene au fost introduse de către *Morse* şi *Hedlund* în anii 1940 ([6]) şi sunt studiate astăzi din punct de vedere combinatoric, algebric, geometric.

Cuvintele sturmiene sau generalizarea lor – cuvintele episturmiene ([3]) – intervin într-o multitudine de domenii: teoria numerelor (aproximaţii diofantiene), geometria discretă (drepte discrete), sisteme dinamice, fizica teoretică (cristalografie), teoria imaginilor pe ordinator (Digital straightness), biologia moleculară (studiu acidului deoxiribonucleic i.e. grupului ADN: A, C, G şi T), teoria muzicală ([7]) etc.

Teorema 19 se poate generaliza pentru un cuvânt sturmian oarecare ([6] pagina 40) înlocuind ecuaţia din teorema 19 cu ecuaţia diferenţială omogenă de gradul 2:

$$y'' + \Psi(x)y = 0, \qquad \text{(Sturm - Liouville)}$$

unde $\Psi(x)$ este o funcţie continuă de perioadă l (de aici termenul „cuvinte sturmiene").

Complemente

1) Şirurile lui *Wythoff* deci cuvântul lui *Fibonacci*, se pot regăsi utilizând teoria grafurilor; mai precis determinând nucleul grafului lui *Wythoff* – vezi jocul lui *Rufus Isaacs* – i.e.:

Graful $G = \{V, A\}$ următor (deplasarea reginei la jocul de şah):

Mulţimea vârfurilor $V = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2\}$;

Mulţimea arcurilor orientate $A : \Gamma(i,j)$, mulţimea succesorilor lui (i,j), este definită prin $\Gamma(i,j) = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid$ fie $p = i$ şi $q < j$; fie $q = j$ şi $p < i$; fie $p < 1$, $q < j$ şi $i - j = p - q\big\}$ (vezi [2] capitolul 14 pagina 308).

2) La olimpiada internaţională 1999 (Bucureşti) subiectul 3 a fost următorul:

Să se demonstreze că mulţimea $\mathbb{N}^*$ este reuniunea a două submulţimi disjuncte $\{f(1), f(2), \ldots\}$ şi $\{g(1), g(2), \ldots\}$ verificând cele trei condiţii:

- $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$.
- $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$.
- $g(n) = f(f(n)) + 1$ pentru orice $n \geq 1$. (1)

Se demonstrează – vezi corectarea oficială a subiectului olimpiadei – că şirurile $\{f(i)\}$, $\{g(i)\}$ sunt cele două şiruri al lui *Wythoff*. (Utilizând teorema lui *Beatty* ecuaţia funcţională (1) se scrie $[nb] = [[na]a] + 1$ sau $b = a^2$, considerând un echivalent în ∞. Deducem în final: $a = \varphi$, $f(n) = [n\varphi]$ şi $g(n) = [n\varphi^2]$.)

BIBLIOGRAFIE

[1] V. Berthé, *Autour du systéme de numération d'Ostrowski*, Bull. Belgian Math. Soc. 8(2001), pages 209 - 239.

[2] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod Paris 1970, Chapitre 14 Noyaux et fonctions de Grundy, pages 291 - 313.

[3] J. Justin, *Episturmian words: a survey Amy Glen*, arXiv: 0801.1655 `http://arxiv.org/abs/0801.1655`, va apare în RAIRO Theoretical Informatics and Applications.

[4] Z. Kasa, *Combinatorică cu aplicaţi*, Capitolul 8, paginile 111 - 168, `http://www.cs.ubbcluj.ro/~kasa/combinatorica.html`

[5] * * * *Algebraic Combinatorics on words* ch. 1 şi 2 Lothaire 2001 Cambridge University Press 2002 Lothaire's page (Jean Berstel)

[6] K. A. Hedlund, *Symbolic dynamics* II : *Sturmian sequences*, Marsten Morse, American Journal Math. 62 (1940) pages 1 - 42.

[7] T. Noll, *Sturmian sequences and morphisms : A Music - Theoretical application*, Mathématiques et Musique, Société Mathématique de France 2008 - Journée annuelle `http://user.cs.tu-berlin.de/~noll/SMF_Noll.pdf`

Asupra rafinării unor inegalităţi geometrice în tetraedru

MARIUS OLTEANU[1)]

Abstract. In this paper we improve some geometric inequalities recording important lines in the tetrahedron.

Keywords: Durrande inequality, orthocentric tetrahedron.

MSC : 26D15

Prezentul articol are drept scop prezentarea într-un cadru unitar, a unor noi rafinări ale câtorva inegalităţi de bază din geometria tetraedrului. Pentru început se vor stabili noi rezultate valabile într-un tetraedru oarecare, după care vor fi evidenţiate, pentru clasa tetraedrelor ortocentrice şi echifaciale noi întăriri ale rafinărilor inegalităţii *Euler-Durrande* ($R \geq 3r$) stabilite pentru cazul general al tetraedrelor oarecare şi menţionate în [7] pag. 471 – 478, [8] pag. 625 – 630, [9] pag. 200 – 208, [10] pag. 98 – 108.

Vom utiliza următoarele notaţii referitoare la elementele unui tetraedru oarecare $[ABCD]$: $V-$volumul său, S_A-aria feţei (BCD) (analog S_B, S_C, S_D), $S = S_A + S_B + S_C + S_D$, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $l = AD$, $m = BD$, $n = CD$, r_a-raza sferei exînscrise de speţa întâi care este tangentă feţei (BCD) (analog r_b, r_c, r_d), h_a, m_a-lungimea înălţimii, respectiv a medianei tetraedrului ce conţine vârful A (analog h_b, h_c, h_d şi m_b, m_c, m_d), r_A, R_A-raza cercului înscris respectiv circumscris triunghiului (feţei) BCD (analog r_B, r_C, r_D şi R_B, R_C, R_D), d_1, d_2, d_3- lungimile perpendicularelor comune corespunzătare celor trei perechi de muchii opuse, b_1, b_2, b_3- lungimile celor trei bimediane, r, $R-$ razele sferei înscrise, respectiv circumscrise tetraedrului, $I-$centrul sferei înscrise, $O-$ centrul sferei circumscrise, $G-$centrul de greutate al tetraedrului, $H-$ortocentrul tetraedrului ortocentric $[ABCD]$, $\Omega-$centrul sferei lui *Euler* asociată tetraedrului, iar $\Gamma-$ simetricul punctului Ω faţă de centrul de greutate G.

Lemă. *Fie* $x, y, z, t \in R_+^*$. *Atunci au loc inegalităţile*:

a) $x + y + z + \dfrac{3}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} \geq 4\sqrt[3]{xyz}$;

[1)] S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, Sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea

b) $x+y+z+t+\dfrac{4}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}} \geq 5\sqrt[4]{xyzt}$.

Demonstraţie. a) Fie $m_a \geq m_g \geq m_h$ mediile aritmetică, geometrică respectiv armonică a celor trei numere $x, y, z > 0$. Vom arăta că $m_a^2 \cdot m_h \geq \geq m_g^3$. Într-adevăr:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \cdot \frac{3xyz}{xy+yz+zx} \geq xyz \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0,$$

evident. Atunci:

$$x+y+z+\frac{3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}} = 3m_a+m_h \geq 4\sqrt[4]{m_a^3 \cdot m_h} = 4\sqrt[4]{m_a\left(m_a^2 \cdot m_h\right)} \geq$$
$$\geq 4\sqrt[4]{m_a \cdot m_g^3} \geq 4\sqrt[4]{m_g^4} = 4\sqrt[3]{xyz}.$$

b) Procedăm ca la punctul a), unde notaţiile (valabile pentru patru numere strict pozitive) au aceleaşi semnificaţii.

Vom arăta că $m_a^3 \cdot m_h \geq m_g^4$. Într-adevăr:

$$\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^3 \cdot \frac{4xyzt}{xyz+xyt+xzt+yzt} \geq xyzt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z+t)^3 \geq 16(xyz+xyt+xzt+yzt),$$

inegalitate adevărată conform rezultatului (212), de la pag. 84 din [11].

Atunci:

$$x+y+z+t+\frac{4}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}} = 4m_a+m_h \geq 5\sqrt[5]{m_a^4 \cdot m_h} =$$
$$= 5\sqrt[5]{m_a\left(m_a^3 \cdot m_h\right)} \geq 5\sqrt[5]{m_a \cdot m_g^4} \geq 5\sqrt[5]{m_g^5} = 5\sqrt[4]{xyzt}.$$

Propoziţia 1. *În orice tetraedru $[ABCD]$ au loc inegalităţile:*

a) $h_a+h_b+h_c+h_d+4r \geq 5\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d} \geq 5\sqrt[5]{4h_a h_b h_c h_d r} \geq 20r$;

b) $r_a+r_b+r_c+r_d+2r \geq 5\sqrt[4]{r_a r_b r_c r_d} \geq 5\sqrt[5]{2r_a r_b r_c r_d r} \geq 10r$;

c) $\dfrac{5}{4r} \geq \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}+\dfrac{1}{h_d}+\dfrac{4}{h_a+h_b+h_c+h_d} \geq \dfrac{5}{\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}}$;

d) $\dfrac{5}{2r} \geq \dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}+\dfrac{1}{r_d}+\dfrac{4}{r_a+r_b+r_c+r_d} \geq \dfrac{5}{\sqrt[4]{r_a r_b r_c r_d}}$.

Demonstraţie. a) Înlocuim la punctul b) al lemei pe $x=h_a$, $y=h_b$, $z=h_c$, $t=h_d$ şi ţinem seama de relaţia $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}+\dfrac{1}{h_d}=\dfrac{1}{r}$. A doua inegalitate este echivalentă cu $h_a h_b h_c h_d \geq 256r^4$, inegalitate clasică, valabilă în orice tetraedru. Analog, cea de a treia inegalitate este echivalentă tot cu $h_a h_b h_c h_d \geq 256r^4$.

b) Se procedează ca la punctul a), unde se mai ţine seama de relaţiile $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}=\frac{2}{r}$ şi $r_a r_b r_c r_d \geq 16r^4$, valabile în orice tetraedru $[ABCD]$.

c) Avem $h_a+h_b+h_c+h_d \geq 16r$; rezultă:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}+\frac{4}{h_a+h_b+h_c+h_d} \leq \frac{1}{r}+\frac{1}{4r}=\frac{5}{4r};$$

a doua inegalitate rezultă imediat prin aplicarea lemei b), unde se consideră $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$, $t=\frac{1}{h_d}$.

d) Deoarece $r_a+r_b+r_c+r_d \geq 8r$, rezultă:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}+\frac{4}{r_a+r_b+r_c+r_d} \leq \frac{2}{r}+\frac{1}{2r}=\frac{5}{2r};$$

tot prin aplicarea lemei b), în care se ia $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, $t=\frac{1}{r_d}$, rezultă imediat cea de a doua inegalitate.

Observaţii. 1. Toate cele patru puncte ale propoziţiei 1 rafinează cunoscutele inegalităţi din geometria tetraedrului:

$$\begin{cases} h_a+h_b+h_c+h_d \geq 16r, \\ r_a+r_b+r_c+r_d \geq 8r \\ h_a h_b h_c h_d \geq 256r^4, \\ r_a r_b r_c r_d \geq 16r^4. \end{cases} \tag{$*$}$$

Menţionăm că rafinări ale inegalităţilor $(*)$ au fost recent abordate şi în [2] (pag. 29-37).

2. Deoarece $m_a \geq h_a$ (şi analoagele), $m_a+m_b+m_c+m_d \leq \frac{16R}{3}$ şi

$$\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d} \leq \sqrt[4]{m_a m_b m_c m_d} \leq \frac{1}{4}\left(m_a+m_b+m_c+m_d\right) \leq \frac{4R}{3},$$

ţinând seama de inegalităţile a) şi c) ale propoziţiei 1, precum şi de relaţiile (23), (24), (25), (26) de la pag. 28 din [2], rezultă că au loc următoarele rafinări ale inegalităţii *Euler-Durrande* ($R \geq 3r$) într-un tetraedru oarecare $[ABCD]$:

a) $4\left(\frac{4R}{3}+r\right) \geq m_a+m_b+m_c+m_d+4r \geq h_a+h_b+h_c+h_d+4r \geq$

$$\geq 5\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d} \geq 5\sqrt[5]{4h_a h_b h_c h_d r} \geq$$

$$\geq 10\sqrt[5]{2\cdot r\cdot \frac{\left(h_a h_b h_c h_d\right)^2}{\left(h_a+h_b\right)\left(h_b+h_c\right)\left(h_c+h_d\right)\left(h_d+h_a\right)}} \geq 20r.$$

b) $$\frac{5}{4r} \geq \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} + \frac{4}{h_a + h_b + h_c + h_d} \geq \frac{5}{\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}} \geq$$
$$\geq \frac{5}{\sqrt[4]{m_a m_b m_c m_d}} \geq \frac{15}{4R}.$$

c) $$4\left(\frac{4R}{3} + r\right) \geq m_a + m_b + m_c + m_d + 4r \geq h_a + h_b + h_c + h_d + 4r \geq$$
$$\geq 5\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d} \geq 5\sqrt[5]{4 h_a h_b h_c h_d r} \geq$$
$$\geq 10 \cdot \sqrt[5]{2 \cdot r \cdot \frac{\left(h_a h_b h_c h_d\right)^2}{\left[\left(h_a + h_b\right)\left(h_a + h_c\right)\left(h_a + h_d\right)\left(h_b + h_c\right)\left(h_b + h_d\right)\left(h_c + h_d\right)\right]^{\frac{2}{3}}}} \geq 20r.$$

d) $$\frac{16R}{3} \geq m_a + m_b + m_c + m_d \geq h_a + h_b + h_c + h_d \geq$$
$$\geq 8 \frac{\sqrt{h_a h_b h_c h_d}}{\sqrt[4]{\left(h_a + h_b\right)\left(h_b + h_c\right)\left(h_c + h_d\right)\left(h_d + h_a\right)}} \geq 16r.$$

e) $$\frac{16R}{3} \geq m_a + m_b + m_c + m_d \geq h_a + h_b + h_c + h_d \geq$$
$$\geq 8 \frac{\sqrt{h_a h_b h_c h_d}}{\sqrt[6]{\left(h_a + h_b\right)\left(h_a + h_c\right)\left(h_a + h_d\right)\left(h_b + h_c\right)\left(h_b + h_d\right)\left(h_c + h_d\right)}} \geq 16r.$$

3. Având în vedere inegalităţile c) şi d) ale propoziţiei 2, pag. 31 din [2] mai putem încă rafina inegalitatea b) a propoziţiei 1 din acest articol, obţinând următoarele şiruri de inegalităţi:

i) $$r_a + r_b + r_c + r_d + 2r \geq 5\sqrt[4]{r_a r_b r_c r_d} \geq 5\sqrt[5]{2 r_a r_b r_c r_d \cdot r} \geq$$
$$\geq 5\sqrt[5]{2r \cdot \frac{\left(h_a h_b h_c h_d\right)^2}{\left(h_a + h_b\right)\left(h_b + h_c\right)\left(h_c + h_d\right)\left(h_d + h_a\right)}} \geq 10r.$$

ii) $$r_a + r_b + r_c + r_d + 2r \geq 5\sqrt[4]{r_a r_b r_c r_d} \geq 5\sqrt[5]{2 r_a r_b r_c r_d \cdot r} \geq$$
$$\geq 5\sqrt[5]{2r \cdot \frac{\left(h_a h_b h_c h_d\right)^2}{\left[\left(h_a + h_b\right)\left(h_a + h_c\right)\left(h_a + h_d\right)\left(h_b + h_c\right)\left(h_b + h_d\right)\left(h_c + h_d\right)\right]^{\frac{2}{3}}}} \geq 10r.$$

4. Deoarece:
$$\frac{64}{9}R^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 + h_d^2,$$
$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 + h_d^2 + 16r^2 \geq \frac{\left(h_a + h_b + h_c + h_d + 4r\right)^2}{5}$$
şi:
$$r_a^2 + r_b^2 + r_c + r_d^2 + 4r^2 \geq \frac{1}{5}\left(r_a + r_b + r_c + r_d + 2r\right)^2,$$

ca şi consecinţe a celor prezentate până acum, se obţin noi rafinări ale inegalităţii *Euler-Durrande*, valabile în orice tetraedru $[ABCD]$:

a) $$16\left(\frac{4R^2}{9}+r^2\right)\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2+16r^2\geq$$
$$\geq h_a^2+h_b^2+h_c^2+h_d^2+16r^2\geq\frac{1}{5}\left(h_a+h_b+h_c+h_d+4r\right)^2\geq$$
$$\geq 5\sqrt{h_ah_bh_ch_d}\geq 5\sqrt[5]{16r^2h_a^2h_b^2h_c^2h_d^2}\geq$$
$$\geq 20\sqrt[5]{4r^2\frac{\left(h_ah_bh_ch_d\right)^4}{\left(h_a+h_b\right)^2\left(h_b+h_c\right)^2\left(h_c+h_d\right)^2\left(h_d+h_a\right)^2}}\geq 80r^2.$$

b) $$16\left(\frac{4R^2}{9}+r^2\right)\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2+16r^2\geq$$
$$\geq h_a^2+h_b^2+h_c^2+h_d^2+16r^2\geq\frac{1}{5}\left(h_a+h_b+h_c+h_d+4r\right)^2\geq$$
$$\geq 5\sqrt{h_ah_bh_ch_d}\geq 5\sqrt[5]{16r^2\cdot h_a^2h_b^2h_c^2h_d^2}\geq$$
$$\geq 20\sqrt[5]{4r^2\frac{\left(h_ah_bh_ch_d\right)^4}{\left[\left(h_a+h_b\right)\left(h_a+h_c\right)\left(h_a+h_d\right)\left(h_b+h_c\right)\left(h_b+h_d\right)\left(h_c+h_d\right)\right]^{\frac{4}{3}}}}\geq$$
$$\geq 80r^2.$$

c) $$\frac{64}{9}R^2\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\geq h_a^2+h_b^2+h_c^2+h_d^2\geq$$
$$\geq\frac{1}{4}\left(h_a+h_b+h_c+h_d\right)^2\geq$$
$$\geq 16\frac{h_ah_bh_ch_d}{\sqrt{\left(h_a+h_b\right)\left(h_b+h_c\right)\left(h_c+h_d\right)\left(h_d+h_a\right)}}\geq 64r^2.$$

d) $$\frac{64}{9}R^2\geq m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\geq h_a^2+h_b^2+h_c^2+h_d^2\geq$$
$$\geq\frac{1}{4}\left(h_a+h_b+h_c+h_d\right)^2\geq$$
$$\geq 16\cdot\frac{h_ah_bh_ch_d}{\sqrt[3]{\left(h_a+h_b\right)\left(h_a+h_c\right)\left(h_a+h_d\right)\left(h_b+h_c\right)\left(h_b+h_d\right)\left(h_c+h_d\right)}}\geq 64r^2.$$

5. Menţionăm că prin majorările $\left(\frac{4R}{3}\right)^4\geq h_ah_bh_ch_d$ şi $\frac{16R}{3}\geq$ $\geq h_a+h_b+h_c+h_d$ aplicate relaţiilor (21*), (22*), (23), (24), (25) şi (26), de la pag. 28 din [2] se obţin direct încadrări/rafinări ale inegalităţii *Euler-Durrande*, valabile în orice tetraedru $[ABCD]$.

6. Pentru propoziţia 1 egalităţile se ating numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial. Această condiţie rămâne valabilă şi pentru inegalităţile

i) şi ii) ale punctului **3** din prezentele observaţii. Pentru restul inegalităţilor stabilite până în prezent, egalităţile se ating simultan numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

Propoziţia 2. *În orice tetraedru $[ABCD]$ are loc următoarea rafinare a inegalităţii Euler-Durrande*:

$$\frac{64R^2}{3} \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 + \frac{3}{\frac{1}{a^2+l^2} + \frac{1}{b^2+m^2} + \frac{1}{c^2+n^2}} \geq$$
$$\geq 4\sqrt[3]{(a^2+l^2)(b^2+m^2)(c^2+n^2)} \geq 8\sqrt[3]{abclmn} \geq 16\sqrt[3]{9V^2} \geq 192r^2.$$

Demonstraţie. În lema - a) considerăm $x = a^2 + l^2$, $y = b^2 + m^2$, $z = c^2 + n^2$ etc. Egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $a^2 + l^2 = b^2 + m^2 = c^2 + n^2$, echivalent cu faptul că $[ABCD]$ este ortocentric.

Mai departe avem:

$$\frac{1}{a^2+l^2} + \frac{1}{b^2+m^2} + \frac{1}{c^2+n^2} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2},$$

rezultă:

$$\frac{3}{\frac{1}{a^2+l^2} + \frac{1}{b^2+m^2} + \frac{1}{c^2+n^2}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2}{3}. \tag{1}$$

Deoarece:

$$16R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2, \tag{2}$$

([4], pag. 23, problema 79), atunci, din (1) şi (2), rezultă inegalitatea din marginea stângă.

În continuare, $a^2 + l^2 \geq 2al$, $b^2 + m^2 \geq 2bm$, $c^2 + n^2 \geq 2cn$ implică:

$$4\sqrt[3]{(a^2+l^2)(b^2+m^2)(c^2+n^2)} \geq 8\sqrt[3]{abc\,l\,mn}. \tag{3}$$

Se ştie că:

$$72V^2 \leq abclmn, \tag{4}$$

([4], pag. 38, problema 166) şi:

$$V \geq 8\sqrt[3]{3}r^3 \tag{5}$$

([7], pag. 473, relaţia (12)).

Din relaţiile (3), (4) şi (5) se obţine imediat rezultatul căutat.

Toate egalităţile se ating simultan numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

Propoziţia 3. *În orice tetraedru ortocentric $[ABCD]$ are loc următoarea rafinare a inegalităţii Euler-Durrande*:

$$\frac{4R^2}{3} \geq R^2 + 3r^2 \geq \frac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right) \geq 12r^2. \tag{5*}$$

Demonstraţie. Vom demonstra. pentru început, inegalitatea din centru.

Conform teoremei 5, pag. 165, din [3], avem relaţia:

$$HI^2 = R^2 + 3r^2 - \frac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right) \geq 0. \tag{6}$$

În continuare, din $R \geq 3r$, rezultă $\frac{4R^2}{3} \geq R^2 + 3r^2$, iar din [8], pag. 630, se ştie că $a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 144r^2$.

Egalităţile se ating numai dacă $[ABCD]$ este regulat.

Având în vedere inegalitatea (5*), prin utilizarea ei – sub diferite forme – se pot rafina, prin trecere la clasa tetraedrelor ortocentrice, rezultatele stabilite în [7], pag. 471-478, [10] pag. 99-108, [9] pag. 203-207, [8] pag. 625-630, [2] pag. 35. În acest sens, prezentăm în continuare, sub formă sintetică, câteva dintre aceste noi rafinări ale inegalităţii *Euler-Durrande*, cu valabilitate – aşa cum am precizat – doar pentru clasa tetraedrelor ortocentrice. Enunţăm deci:

Propoziţia 4. *În orice tetraedru ortocentric* $[ABCD]$ *au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Euler-Durrande*:

a) $$64r^2 \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 + h_d^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \leq \leq \frac{16}{3}\left(R^2 + 3r^2\right) \leq \frac{64}{9}R^2.$$

b) $$16r \leq h_a + h_b + h_c + h_d \leq m_a + m_b + m_c + m_d \leq \leq \frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 + 3r^2} \leq \frac{16}{3}R.$$

c) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \geq \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_d} \geq \geq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + 3r^2}} \geq \frac{3}{R}.$$

d) $$48 \cdot \frac{r^2}{R} \leq \frac{32\sqrt{3}r^2}{\sqrt{R^2 + 3r^2}} \leq \frac{h_a^2}{m_a} + \frac{h_b^2}{m_b} + \frac{h_c^2}{m_c} + \frac{h_d^2}{m_d} \leq \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{R^2 + 3r^2} \leq \frac{16R}{3}.$$

e) $$\frac{36r^2}{R^2} \leq \frac{48r^2}{R^2 + 3r^2} \leq \frac{h_a^2}{m_a^2} + \frac{h_b^2}{m_b^2} + \frac{h_c^2}{m_c^2} + \frac{h_d^2}{m_d^2} \leq 4.$$

f) $$8\sqrt{3}r^3 \leq V \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\, r\left(R^2 + 3r^2\right) \leq \frac{8rR^2}{3\sqrt{3}}.$$

g) $$\frac{4\sqrt{2}}{3}R \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{R^2 + 3r^2} \geq r_A + r_B + r_C + r_D \geq 4\sqrt{2}\, r.$$

h) $$\frac{8}{9}R^2 \geq \frac{2}{3}\left(R^2 + 3r^2\right) \geq r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 8r^2.$$

i) $8\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}R-r\right) \geq \frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3R^2+9r^2}-3r\right) \geq$
$\geq R_A+R_B+R_C+R_D \geq 8\sqrt{2}\,r.$

j) $\frac{32}{9}\left(5R^2-36r^2\right) \geq 8\left(\frac{5R^2}{3}-11r^2\right) \geq$
$\geq R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geq 32r^2.$

k) $\frac{6\sqrt{2}}{R} \leq \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{R^2+3r^2}} \leq \frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} \leq \frac{2\sqrt{2}}{r}.$

l) $\frac{18}{R^2} \leq \frac{24}{R^2+3r^2} \leq \frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2} \leq \frac{2}{r^2}.$

m) $\frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{3}R-r} \leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{R^2+3r^2}-\sqrt{3}\,r} \leq \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_D} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}.$

n) $\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{5R^2-36r^2} \leq \frac{6}{5R^2-33r^2} \leq \frac{1}{R_A^2}+\frac{1}{R_B^2}+\frac{1}{R_C^2}+\frac{1}{R_D^2} \leq \frac{1}{2r^2}.$

o) $64r^4 \leq R_AR_BR_CR_D \leq \frac{64}{9}\left(\sqrt{R^2+3r^2}-\sqrt{3}\,r\right) \leq 64\left(\frac{2}{3}R-r\right)^4.$

p) $4r^4 \leq r_Ar_Br_Cr_D \leq \frac{S^2}{16\cdot 27} \leq \left(\frac{R^2+3r^2}{6}\right)^2 \leq \frac{4}{81}R^4.$

q) $\frac{9}{4R^2} \leq \frac{3}{R^2+3r^2} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$

r) $6 \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{l}+\frac{l}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{a} \leq \frac{1}{r}\cdot\sqrt{3\left(3r^2+R^2\right)} \leq 2\frac{R}{r}.$

s) $\frac{9}{4R^2} \leq \frac{3}{R^2+3r^2} \leq \frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{m_d^2} \leq$
$\leq \frac{1}{m_ah_a}+\frac{1}{m_bh_b}+\frac{1}{m_ch_c}+\frac{1}{m_dh_d} \leq \sum\frac{1}{h_a^2} \leq$
$\leq \left(\frac{R^2+3r^2}{24r^3}\right)^2 \leq \frac{1}{324}\cdot\frac{R^4}{r^6}.$

t) $\frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}+\frac{1}{r_d^2} \leq \left(\frac{R^2+3r^2}{12r^3}\right)^2 \leq \frac{1}{81}\cdot\frac{R^4}{r^6}.$

u) $\frac{2^{10}}{27}\cdot R^3 \geq \frac{2^7}{3\sqrt{3}}\left(R^2+3r^2\right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\sum m_a^2\right)\left(\sum h_a\right) \geq \frac{128}{\sqrt{3}}\cdot V \geq 2^{10}\cdot r^3.$

v) $\frac{9}{4R^2} \leq \frac{3}{R^2+3r^2} \leq \frac{3}{b_1^2} \leq \frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2} =$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}+\frac{1}{r_d^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{R^2+3r^2}{12r^3}\right) \leq \frac{1}{324}\cdot\frac{R^4}{r^6};$

($b_1=b_2=b_3$, $[ABCD]$ fiind ortocentric).

w) $\dfrac{AX^{4k}}{m_a^n}+\dfrac{BX^{4k}}{m_b^n}+\dfrac{CX^{4k}}{m_c^n}+\dfrac{DX^{4k}}{m_d^n}\geq 2^{2-n}\cdot 3^{4k+\frac{n}{2}}\cdot r^{4k}\left(R^2+3r^2\right)^{-\frac{n}{2}}\geq$

$\geq 3^{4k+n}\cdot 4^{1-n}\cdot\dfrac{r^{4k}}{R^n}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$, $n\in\{0,1,2\}$, $X\in\{O,G,H,\Omega,\Gamma\}$.

x) $\dfrac{AX^n}{m_a^2}+\dfrac{BX^n}{m_b^2}+\dfrac{CX^n}{m_c^2}+\dfrac{DX^n}{m_d^2}\leq R^n\cdot\left(\dfrac{R^2+3r^2}{24r^3}\right)^2\leq\dfrac{1}{324}\cdot\dfrac{R^{4+n}}{r^6}$,
unde $n\in\{0,1,2\}$, iar $X\in\{O,G,H,\Omega,\Gamma\}$.

y) $\dfrac{AX}{r_a}+\dfrac{BX}{r_b}+\dfrac{CX}{r_c}+\dfrac{DX}{r_d}\leq\dfrac{R\left(R^2+3r^2\right)}{6r^3}\leq\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}$,
unde $X\in\{O,G,H,\Omega,\Gamma\}$.

z) $\dfrac{h_a^m}{m_a^n}+\dfrac{h_b^m}{m_b^n}+\dfrac{h_c^m}{m_c^n}+\dfrac{h_d^m}{m_d^n}\geq 2^{2+2m-n}\cdot r^m\cdot\left(\dfrac{3}{R^2+3r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\geq$

$\geq 4^{1+m-n}\cdot r^m\cdot\left(\dfrac{3}{R}\right)^n$, $\forall\, m\in\{0\}\cup[1,\infty)$, $n\in\{0,1,2\}$.

α) $8\leq\dfrac{m_a}{r_a}+\dfrac{m_b}{r_b}+\dfrac{m_c}{r_c}+\dfrac{m_d}{r_d}\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{r^3}\left(R^2+3r^2\right)^{\frac{3}{2}}\leq\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}$.

β) $4\leq\dfrac{m_a}{h_a}+\dfrac{m_b}{h_b}+\dfrac{m_c}{h_c}+\dfrac{m_d}{h_d}\leq\dfrac{\left(R^2+3r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}\,r^3}\leq\dfrac{4}{27}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}$.

γ) $64r^2\leq\sum m_ah_a\leq\dfrac{16}{3}\left(R^2+3r^2\right)\leq\dfrac{64}{9}R^2$.

Dacă, în plus, tetraedrul ortocentric $[ABCD]$ are ortocentrul $H\in\in\operatorname{int}(ABCD)$ se mai pot rafina şi rezultatele stabilite în [6] pag 22-23, [8] pag. 628-629 şi [2] pag. 57 problema 305.

Avem aşadar:

Propoziţia 5. *În orice tetraedru ortocentric $[ABCD]$ având ortocentrul $H\in\operatorname{int}(ABCD)$ au loc următoarele rafinări ale inegalităţii Euler-Durrande*:

a) $\dfrac{r_a^m}{m_a^n}+\dfrac{r_b^m}{m_b^n}+\dfrac{r_c^m}{m_c^n}+\dfrac{r_d^m}{m_d^n}\geq 2^{2+m-n}\cdot r^m\cdot\left(\dfrac{3}{R^2+3r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\geq$

$\geq 2^{2+m-2n}\cdot r^m\cdot\left(\dfrac{3}{R}\right)^n$, $\forall\, m,n\in\{0\}\cup[1,\infty)$.

b) $\dfrac{S_A^m}{m_a^n}+\dfrac{S_B^m}{m_b^n}+\dfrac{S_C^m}{m_c^n}+\dfrac{S_D^m}{m_d^n}\geq 2^{2-2m-n}\cdot\left(\dfrac{3}{R^2+3r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot S^m\geq$

$\geq 4^{1-m-n}\cdot\left(\dfrac{3}{R}\right)^n\cdot S^m$, $\forall\, m,n\in\{0\}\cup[1,\infty)$.

c) $\dfrac{r_a^m}{h_a^m\cdot m_a}+\dfrac{r_b^m}{h_b^m\cdot m_b}+\dfrac{r_c^m}{h_c^m\cdot m_c}+\dfrac{r_d^m}{h_d^n\cdot m_d}\geq 2^{1-m}\cdot\left(\dfrac{3}{R^2+3r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\geq$

$\geq 2^{-m}\cdot\dfrac{3}{R}$, $\forall\, m\in\{0\}\cup[1,\infty)$.

d) $4 \leq \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} + \frac{m_d}{h_d} \leq \frac{2}{r\sqrt{3}} \cdot \sqrt{R^2+3r^2} \leq \frac{4R}{3r}$.

e) $12 \cdot \frac{r}{R} \leq \frac{8r\sqrt{3}}{\sqrt{R^2+3r^2}} \leq \frac{h_a}{m_a} + \frac{h_b}{m_b} + \frac{h_c}{m_c} + \frac{h_d}{m_d} \leq 4$.

f) $16r \leq \frac{m_a^2}{h_a} + \frac{m_b^2}{h_b} + \frac{m_c^2}{h_c} + \frac{m_d^2}{h_d} \leq \frac{4\left(R^2+3r^2\right)}{3r} \leq \frac{16}{9} \cdot \frac{R^2}{r}$.

g) $4 \leq \left(\frac{m_a}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{m_b}{h_b}\right)^2 + \left(\frac{m_c}{h_c}\right)^2 + \left(\frac{m_d}{h_d}\right)^2 \leq \frac{\left(R^2+3r^2\right)^3}{2^4 \cdot 3^3 \cdot r^6} \leq \frac{4}{729} \cdot \frac{R^6}{r^6}$.

h) $\frac{1}{324} \cdot \frac{R^4}{r^6} \geq \left(\frac{R^2+3r^2}{24r^3}\right)^2 \geq \sum \frac{1}{m_a h_a} \geq \frac{\sqrt{3}}{2r \cdot \sqrt{R^2+3r^2}} \geq \frac{3}{4Rr}$.

i) $m_a S_A + m_b S_B + m_c S_C + m_d S_D \leq \frac{\sqrt{3}}{18}\left(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\right)^{\frac{3}{2}} \leq$

$\leq 4\left(R^2+3r^2\right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{32R^3}{3\sqrt{3}}$.

Propoziţia 6. *În orice tetraedru ortocentric $[ABCD]$ au loc inegalităţile*:

a) $R^2 \geq r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 9r^2$;

b) $OH^2 \geq OI^2 + 3HI^2$.

Demonstraţie. a) $[ABCD]$ fiind ortocentric, avem identităţile:

$$a^2 + l^2 = b^2 + m^2 = c^2 + n^2, \tag{7}$$

([4], pag. 6, teorema T. 10-a));

$$h_a^2 + 4R_A^2 = h_b^2 + 4R_B^2 = h_c^2 + 4R_C^2 = h_d^2 + 4R_D^2 = a^2 + l^2 \tag{8}$$

([4], pag. 1, problema 47).

Ţinând seama de relaţia (5*) a propoziţiei 3, împreună cu identităţile (7) şi (8) se obţine:

$$\begin{aligned} R^2 + 3r^2 &\geq \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot \left(a^2+l^2\right) = \frac{a^2+l^2}{4} = \frac{4\left(a^2+l^2\right)}{16} = \\ &= \frac{\sum h_a^2 + 4 \cdot \sum R_A^2}{16} = \frac{1}{16} \cdot \sum h_a^2 + \frac{1}{4} \sum R_A^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Dar:

$$\frac{1}{16} \cdot \sum h_a^2 \geq 4r^2 \tag{10}$$

şi:

$$\sum R_A^2 \geq 4 \sum r_A^2, \tag{11}$$

(deoarece $R_A \geq 2r_A$ şi anloagele, conform inegalităţii lui *Euler*).

Din (9), (10) şi (11) rezultă că:

$$R^2 \geq r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2. \tag{12}$$

Conform relaţiei (8), pag. 99 din [10] avem:

$$r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 8r^2 \text{ implică } r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 9r^2. \tag{13}$$

Din (12) şi (13) rezultă că:

$$R^2 \geq r^2 + r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + r_D^2 \geq 9r^2.$$

b) Deoarece:

$HI^2 = R^2 + 3r^2 - \dfrac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right)$,

$OG^2 = R^2 - \dfrac{1}{16}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right)$,

$2 \cdot OG = OH$,

rezultă $16 \cdot OG^2 - 12 \cdot HI^2 = 4\left(R^2 - 9r^2\right)$.

Dar, conform problemei 333, pag. 63 din [4] avem $R^2 - 9r^2 \geq OI^2$. Deci $16 \cdot OG^2 - 12HI^2 \geq 4OI^2$ este echivalentă cu $4OG^2 \geq 3HI^2 + OI^2$ sau $OH^2 \geq OI^2 + 3HI^2$.

Observaţie. Din $OH^2 \geq OI^2 + 3HI^2$ rezultă $OH^2 \geq OI^2 + HI^2$, adică punctul I se află situat în interiorul sferei de diametru $[OH]$. În plus, dacă tetraedrul $[ABCD]$ este ortocentric, având ortocentrul $H \in \text{int}(ABCD)$, se ştie, conform problemei 336, pag. 64 din [4], că punctul I este situat în exteriorul sferei de diametru $[OG]$

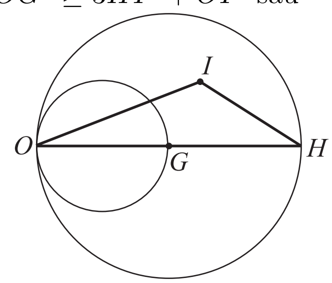


Fig. 1

În concluzie, în cazul tetraedrelor ortocentrice având ortocentrul în interiorul lor, centrul sferei înscrise tetraedrului este situat în zona cuprinsă între exteriorul sferei de diametru $[OG]$ şi interiorul sferei de diametru $[OH]$ (vezi fig. 1).

Propoziţia 7. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru ortocentric. Dacă I este centrul sferei înscrise tetraedrului, atunci are loc următoarea rafinare a inegalităţii Euler-Durrande*:

$$12r \leq AI + BI + CI + DI \leq 2\sqrt{AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2} \leq 4R.$$

Demonstraţie. Din teorema medianei aplicată în triunghiul OHI, avem:

$$4GI^2 = 2(OI^2 + HI^2) - OH^2 = 2(OI^2 + HI^2) - 4OG^2;$$

rezultă:

$$2GI^2 = OI^2 + HI^2 - 2OG^2 \leq OH^2 - 2OG^2 = 2OG^2$$

şi deci:

$$GI^2 \leq OG^2. \tag{**}$$

Din relaţia lui *Leibniz* avem:

$$AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 = 4GI^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 =$$

$$= 4(GI^2 + R^2 - OG^2) \leq 4R^2,$$

conform relaţiei $(**)$.

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică avem:

$$AI + BI + CI + DI \leq 2\sqrt{AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2} \leq 4R.$$

În continuare, se ştie că dacă P este un punct în interiorul tetraedrului oarecare $[ABCD]$, iar $[A'B'C'D']$ este tetraedrul său pedal, unde $\{A'\} = (AP \cap [BCD]$, $\{B'\} = (BP \cap [ACD]$ etc., atunci, conform problemei 92-d), pag. 26 din [4] avem $PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD \geq 81 \cdot PA' \cdot PB' \cdot PC' \cdot PD'$. Dacă $P \equiv I$, atunci $PA' \equiv IA' \geq r$ (şi analoagele) şi rezultă că:

$$AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI \geq 81r^4. \qquad (***)$$

Cum $AI + BI + CI + DI \geq 4\sqrt[4]{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}$, obţinem că:

$$AI + BI + CI + DI \geq 12r.$$

Propoziţia 8. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare, iar I centrul sferei, de rază r, înscrisă tetraedrului. Dreptele AI, BI, CI, DI intersectează a doua oară sfera de rază R, circumscrisă tetraedrului, în punctele A_1, B_1, C_1 şi respectiv D_1. Atunci are loc următoarea rafinare a inegalităţii Euler*:

$$\left(\frac{3r}{R}\right)^8 \leq \frac{V_{[A_1B_1C_1D_1]}}{V_{[ABCD]}} \leq \left(\frac{R}{3r}\right)^8.$$

Demonstraţie. Conform problemei 337, pag. 64 din [4] se ştie că:

$$\frac{V_{[A_1B_1C_1D_1]}}{V_{[ABCD]}} \geq 256 \cdot \frac{S_A S_B S_C S_D}{(S_A + S_B + S_C + S_D)^4}. \qquad (14)$$

Din geometria triunghiului se ştie că $S_A \geq 3\sqrt{3}r_A^2$, $S_B \geq 3\sqrt{3}r_B^2$, $S_C \geq 3\sqrt{3}r_C^2$, $S_D \geq 3\sqrt{3}r_D^2$; rezultă:

$$S_A S_B S_C S_D \geq 3^6 \cdot (r_A r_B r_C r_D)^2. \qquad (15)$$

Însă, conform punctului o) al propoziţiei 4, avem $r_A r_B r_C r_D \geq 4r^4$, de unde, ţinând cont de (15), obţinem:

$$S_A S_B S_C S_D \geq 3^6 \cdot 4^2 \cdot r^8. \qquad (16)$$

Din geometria tetraedrului se ştie că:

$$S_A + S_B + S_C + S_D = S \leq \frac{8}{\sqrt{3}} R^2. \qquad (17)$$

Din (14), (16) şi (17) obţinem:

$$\frac{V_{[A_1B_1C_1D_1]}}{V_{[ABCD]}} \geq 256 \cdot \frac{3^6 \cdot 4^2 \cdot r^8 \cdot 3^2}{2^{12} \cdot R^8} = \left(\frac{3r}{R}\right)^8.$$

Mai departe, conform teoremei T.28, pag. 9 din [4], avem:

$$\frac{V_{[A_1B_1C_1D_1]}}{V_{[ABCD]}} = \frac{\left(R^2 - OI^2\right)^4}{AI^2 \cdot BI^2 \cdot CI^2 \cdot DI^2} \leq \frac{R^8}{AI^2 \cdot BI^2 \cdot CI^2 \cdot DI^2} \leq \left(\frac{R}{3r}\right)^8,$$

în conformitate cu inegalitatea $(***)$.

Propoziţia 9. *În orice tetraedru echifacial* $[ABCD]$ *are loc următoarea rafinare a inegalităţii Euler-Durrande*:

$$8R^3 \geq 9\sqrt{3}V \geq 72Rr^2 \geq 216r^3.$$

Demonstraţie. Inegalitatea:

$$8R^3 \geq 9\sqrt{3}V \geq 216r^3 \tag{18}$$

este valabilă în orice tetraedru (aplicaţia 5.3, pag. 500 din [1]).

Cum $R \geq 3r$, rezultă:

$$72Rr^2 \geq 216r^3. \tag{19}$$

Deoarece într-un tetraedru echifacial feţele acestuia sunt triunghiuri ascuţitunghicce, atunci conform rezultatelor stabilite în [5], pag. 3-6, avem:

$$4\sqrt{3}S_D \geq \sqrt[4]{27\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}.$$

În plus: $S_A = S_B = S_C = S_D$, $a = l$, $b = m$, $c = n$,

$72V^2 = \left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)$, $8R^2 = a^2+b^2+c^2$, $4S_D = S$, $r = \dfrac{3V}{S}$. Rezultă:

$$S\sqrt{3} \geq 6\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{RV} \Leftrightarrow \frac{3V}{r}\cdot\sqrt{3} \geq 6\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{RV} \Leftrightarrow 9\sqrt{3}V \geq 72Rr^2. \tag{20}$$

Din (18), (19) şi (20) se obţine rafinarea căutată.

Observaţie. Într-un tetraedru echifacial $[ABCD]$ se ştie că $h_a = h_b = h_c = h_d = 4r$, $8R^2 = a^2+b^2+c^2$, iar $m_a^2 = m_b^2 = m_c^2 = m_d^2 = \dfrac{2}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)$; rezultă $\dfrac{R}{3r} = \dfrac{m_a}{h_a} \geq 1$ (şi analoagele).

Comentariu. Deoarece din punctul d) al proproziţiei 5 rezultă că în cazul unui tetraedru ortocentric $[ABCD]$, având ortocentrul $H \in \mathrm{int}(ABCD)$, cel uţin unul din rapoartele $\dfrac{m_a}{h_a}$, $\dfrac{m_b}{h_b}$, $\dfrac{m_c}{h_c}$, $\dfrac{m_d}{h_d}$ este cel mult egal cu $\dfrac{R}{3r}$, iar în cazul tetraedrului echifacial, toate aceste rapoarte sunt egale cu $\dfrac{R}{3r}$, în mod natural propunem următoarea:

Conjectură. *În tetraedrul oarecare* $[ABCD]$ *se notează cu* m_a, m_b, m_c, m_d *şi* h_a, h_b, h_c, h_d *lungimile medianelor, respectiv înălţimilor tetraedrului corespunzătoare vârfurilor* A, B, C *şi* D. *Dacă* r *şi* R *reprezintă* *razele sferei înscrise respectiv circumscrise tetraedrului* $[ABCD]$*, atunci are loc inegalitatea* $1 \leq \frac{m_x}{h_x} \leq \frac{R}{3r}$*, oricare ar fi* $x \in \{a, b, c, d\}$.

Acest rezultat ar extinde la tetraedru cunoscuta inegalitate dintr-un triunghi ABC, $\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a}$ (unde de această dată, notaţiile sunt cele cunoscute într-un triunghi) şi analoagele, rezultat ce aparţine regretatului profesor *Laurenţiu Panaitopol*.

Bibliografie

[1] M. Dincă, M. Bencze, *About inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, vol. 12, nr. 2A october 2004.

[2] M. Miculiţa, M. Olteanu, *Rafinări ale unor inegalităţi geometrice în tetraedru*, G. M.-A, nr. 1/2008.

[3] L. Nicolescu, A. Bumbăcea, A. Catană, P. Horja, G. G. Niculescu, N. Oprea, C. Zara, *Metode de rezolvare a prolemelor de geometrie*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

[4] M. Olteanu, *Inegalităţi în tetraedru – culegere de probleme*, Editura Universitară Conspress, Bucureşti, 2003.

[5] M. Olteanu, *În legătură cu o problemă dată la olimpiada de matematică din Polonia, 1992*, R. M. T., nr. 3/2004.

[6] M. Olteanu, *Asupra unor inegalităţi în tetraedru*, G. M. - B, nr. 1/2006.

[7] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii Durrande în tetraedru – partea I*, G. M. - B, nr. 8/2006.

[8] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii Durrande în tetraedru – partea a II-a*, G. M. - B, nr. 12/2006.

[9] M. Olteanu, *Asupra unor inegalităţi în tetraedru*, G. M. - A, nr. 3/2006.

[10] M. Olteanu, *Noi rafinări ale inegalităţii lui Durrande în tetraedru*, G. M. - A, nr. 2/2008

[11] M. Onucu-Drimbe, *Inegalităţi, idei şi metode*, Biblioteca Olimpiadelor de Matematică, nr. 6, Editura Gil, Zalău, 2003.

NOTE MATEMATICE ŞI METODICE

An Olympiad problem: Zeroes of functions in the image of a Volterra operator

Radu Gologan[1)] and Cezar Lupu [2)]

Abstract. We consider a generalization of an olympiad problem which can be regarded as a result for a Volterra operator.

Keywords: mean value theorem, integrals, Volterra operator.
MSC : 26A24, 26A33.

Introduction & Main result

One of the problems of the Romanian National Olympiad in 2006 was the following:

Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *be a continuous function with*:

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Show that there exists $c \in (0,1)$ *such that*:

$$\int_0^c xf(x)dx = 0.$$

In what follows we give two proofs to this problem. In the second proof we shall use a mean value theorem due to Flett. For more details we recommend [2] and [3].

First proof. We assume by contradiction that $\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x \neq 0$, $\forall\, t \in (0,1)$. Without loss of generality, let $\int_0^t xf(x)\mathrm{d}x > 0$, $\forall\, t \in (0,1)$ and let $F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. Integrating by part, we obtain:

1) Polytechnic University of Bucharest, Department of Mathematics II and Institute of Mathematics „Simon Stoilow" of the Romanian Academy, Bucharest; E–mail: Radu.Gologan@imar.ro

2) University of Bucharest, Faculty of Mathematics and University of Craiova, Faculty of Mathematics, E-mail: lupucezar@yahoo.com, lupucezar@gmail.com

$$0 < \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x = tF(t) - \int_0^t F(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, t \in (0,1).$$

Now, by passing to the limit when $t \to 1$, and taking into account that $F(1) = 0$, we deduce that:

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leq 0. \tag{$*$}$$

Now, we consider the differentiable function, $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ defined by:

$$H(t) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^t F(x)\mathrm{d}x}{t}, & \text{if} \quad t \neq 0 \\ 0, & \text{if} \quad t = 0. \end{cases}$$

It is easy to see:

$$H'(t) = \frac{tF(t) - \int_0^t F(x)\mathrm{d}x}{t^2} > 0,$$

so μ is increasing on the interval $(0,1)$, so it is increasing on the interval $[0,1]$ (by continuity argument). Because $H(0) = 0$, it follows that:

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x > 0,$$

which is in contradiction with $(*)$. So, there exists $c \in (0,1)$ such that:

$$\int_0^c xf(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Second proof. We consider the following differentiable function $\mathcal{H} : [0,1] \to \mathbb{R}$, defined by:

$$\mathcal{H}(t) = t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x$$

with $\mathcal{H}'(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. It is clear that $\mathcal{H}'(0) = \mathcal{H}'(1) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Applying *Flett*'s mean value theorem (see [1]), there exists $c \in (0,1)$ such that:

$$\mathcal{H}'(c) = \frac{\mathcal{H}(c) - \mathcal{H}(0)}{c}$$

or:

$$c\int_0^c f(x)\mathrm{d}x = c\int_0^c f(x)\mathrm{d}x - \int_0^c xf(x)\mathrm{d}x,$$

which is equivalent to:

$$\int_0^c xf(x)\mathrm{d}x = 0.$$

An extension of theorem 1.1 was given in [4], namely:

Theorem 1.1. *Let $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ be two continuous functions. There exists $c \in (0,1)$ such that*:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^c xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \int_0^c xf(x)\mathrm{d}x.$$

The proof is almost the same with the second proof of theorem 1.1, only this time we shall consider the function $\widetilde{H} : [0,1] \to \mathbb{R}$ defined by:

$$\widetilde{H}(t) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \left(t\int_0^t g(x)\mathrm{d}x - \int_0^t xg(x)\mathrm{d}x \right) -$$

$$- \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \left(t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x \right).$$

The proof of the main result involves some non-elementary facts. The following lemma will be used.

Lemma 1.2. *Let $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ is nondecreasing, continuous in 0 and $\phi(0) = 0$. Then*:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\int_0^t h(x)\phi(x)\mathrm{d}x}{\phi(t)} = 0.$$

Proof. We assume by contradiction that $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\int_0^t h(x)\phi(x)\mathrm{d}x}{\phi(t)} \neq 0.$

Thus, there exists a sequence $t_n > 0$ such that $\dfrac{\int_0^{t_n} h(x)\phi(x)\mathrm{d}x}{\phi(t_n)} \geq c > 0$, which is equivalent to:

$$\int_0^{t_n} h(x)\phi(x)\mathrm{d}x \geq c\phi(t_n) > 0.$$

On the other hand, using the continuity and the fact that ϕ is nondecreasing we obtain:

$$0 < \int_0^{t_n} h(x)\phi(x)\mathrm{d}x \leq t_n\phi(t_n)$$

and by letting $t_n \to 0$ we have a contradiction.

We are now able to state the general form of our intermediate value result.

Theorem 1.3. *Let $f, g, \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ such that f, g are continuous functions and ϕ is nondecreasing, continuous in 0 and $\phi(0) = 0$. Then there exists $c \in (0,1)$ such that*:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^c g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \int_0^c f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. Let $\widetilde{\mathcal{H}}(t) = \int_0^t h(x)\phi(x)\mathrm{d}x$, where $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ is a continuous function. By the preeceding lemma we have $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\widetilde{\mathcal{H}}(t)}{\phi(t)} = 0$. Integrating by parts in the *Riemann-Stieltjes* integral setting, we have:

$$\int_\varepsilon^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \frac{h(x)\phi(x)}{\phi(x)}\mathrm{d}x = \frac{\widetilde{\mathcal{H}}(x)}{\phi(x)}\bigg|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \widetilde{\mathcal{H}}(x)\mathrm{d}\frac{1}{\phi} =$$

$$= \frac{\widetilde{\mathcal{H}}(1)}{\phi(1)} - \frac{\widetilde{\mathcal{H}}(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} - \int_\varepsilon^1 \widetilde{\mathcal{H}}(x)\mathrm{d}\frac{1}{\phi}.$$

Now, by letting $\varepsilon \to 0$, if we assume that $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = 0$, we get:

$$\frac{\widetilde{\mathcal{H}}(1)}{\phi(1)} = \int_0^1 \widetilde{\mathcal{H}}(x)\mathrm{d}\frac{1}{\phi}.$$

This implies that the function $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ cannot be of constant sign on $(0,1)$. Thus there is $c \in (0,1)$ such that $\widetilde{\mathcal{H}}(c) = 0$. In the particular case when:

$$h(t) = f(t)\int_0^1 g(x)\phi(x)\mathrm{d}x - g(t)\int_0^1 f(x)\phi(x)\mathrm{d}x,$$

we clearly have $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = 0$, so by the considerations above there exists $c \in (0,1)$ such that $\int_0^c h(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0$ which is equivalent to:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^c g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \int_0^c f(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

To formulate a consequence, denote by $C([0,1])$ the *Banach* space of continuous functions on $[0,1]$ and by C_{null} the subspace of functions having zero integral.

Theorem 1.4. *Let $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ a nondecreasing function continuous at 0 and such that $\phi(0) = 0$, and consider the Volterra operator $V_\phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ given by $V_\phi(f)(x) = \int_0^x \phi(t)f(t)\mathrm{d}t$. Then, all functions in $V_\phi(C_{\text{null}})$ have at least one zero in $(0,1)$.*

Bibliografie

[1] T.M. Flett, *A mean value problem*, Mathematical Gazette 42(1958), 38–39.
[2] T.L. Rădulescu, V.D. Rădulescu, T. Andreescu, *Problems in Real Analysis: asvanced calculus on the real axis*, Springer Verlag, 2009.
[3] T. Lupu, *Probleme de Analiză Matematică: Calcul Integral*, GIL Publishing House, 1996.
[4] C. Lupu, T. Lupu, *Problem 11290*, American Mathematical Monthly, no. 4/2007.

Inegalităţi şi elemente de teoria şirurilor

PETRU IVĂNESCU[1)] şi FLORIN NICHITA[2)]

Abstract. In this note we prove an elementary inequality by instruments of mathematical analysis

Keywords: sequence, Riemann integral.
MSC : 40A05.

Se dă următoarea inegalitate:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \ldots < 1.$$

Demonstraţia acestei inegalităţi, cu o infinitate de termeni, va rezulta din următoarea propoziţie:

Propoziţie. *Fie şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}+k}, \quad n \in \mathbb{N}^*$.
Atunci au loc următoarele afirmaţii:
a) *Şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este monoton crescător.*
b) *Şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit.*
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

Demonstraţie. a) Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$ vom avea că:

$$\frac{1}{2^{n-1}+k} < \frac{1}{2^n + 2k - 1} + \frac{1}{2^n + 2k}, \qquad (*)$$

aceasta observându-se din faptul că:

$$\frac{1}{2^{n-1}+k} = \frac{1}{2^n+2k} + \frac{1}{2^n+2k} \text{ şi } \frac{1}{2^n+2k} < \frac{1}{2^n+2k-1},$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$.

Însumând inegalităţile $(*)$ după k vom obţine că:

$$a_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}+k} < \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n+2k-1} + \frac{1}{2^n+2k}\right) = a_{n+1},$$

după cum uşor se poate observa.

b) Deoarece $2^{n-1} + k > 2^{n-1}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, rezultă $\frac{1}{2^{n-1}+k} < \frac{1}{2^{n-1}}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$ şi însumând după k obţinem că $a_n < 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 1$.

Cum şirul este strict crescător, obţinem că:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots < 1,$$

[1)] Colegiul Naţional „Liviu Rebreanu“ din Bistriţa
[2)] I. M. A. R., Bucureşti, e-mail: Florin.Nichita@imar.ro

adică:
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \ldots < 1,$$
adică inegalitatea de la începutul lucrării.

c) Limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ se poate calcula independent de a) şi b).

Avem că:
$$a_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}+k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - \ln 2^n + \ln 2^n\right) -$$
$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \ln 2^{n-1} + \ln 2^{n-1}\right) =$$
$$= c_{2^n} - c_{2^{n-1}} + \ln 2^n - \ln 2^{n-1} = c_{2^n} - c_{2^{n-1}} + \ln 2,$$
unde $(c_n)_{n\geq 1}$, $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este şirul lui *Euler* cu limita $c \in (0,1)$, c constanta lui *Euler*, iraţională. Atunci:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_{2^n} - \lim_{n\to\infty} c_{2^{n-1}} + \ln 2 = c - c + \ln 2 = \ln 2.$$

Limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ poate fi calculată şi cu ajutorul sumelor integrale *Riemann*. Avem:
$$a_n = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}+k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1+\dfrac{k}{2^{n-1}}} = \sigma_{\Delta_n^{(n)}}\left(f, \xi_k^{(n)}\right),$$

unde $\sigma_{\Delta_n^{(n)}}(f, \xi_k^{(n)})$ este suma *Riemann* corespunzătoare funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, integrabilă *Riemann*, diviziunii:
$$\Delta_n^{(n)} = \left(0 < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^{n-1}} < \ldots < \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} < \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1\right)$$
a intervalului $[0,1]$ şi $x_k^{(n)} = \dfrac{k}{2^{n-1}} = \xi_k^{(n)}$, punctele diviziunii şi punctele intermediare ale diviziunii $\Delta_n^{(n)}$.

Avem că:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n^{(n)}}\left(f, \xi_k^{(n)}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Observaţii. i) Pentru a demonstra inegalitatea iniţială este nevoie doar de a) şi b) sau doar de a) şi c) deoarece $\ln 2 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

ii) Inegalitatea de la începutul lucrării poate fi abordată de elevi de clasa a VII-a. Propoziţia dată poate fi expusă la clasa a XI-a. Partea din demonstraţie care foloseşte sume *Riemann* este un exerciţiu greu, pentru elevii din clasa a XII-a.

iii) Demonstraţiile noastre sunt foarte concise. La clasă sugerăm o abordare mai explicită.

EXAMENE ŞI CONCURSURI

Concursul Naţional de ocupare a posturilor didactice din municipiul Bucureşti, 15 iulie 2009

SORIN RĂDULESCU[1]) şi I. V. MAFTEI[2])

Enunţuri

Subiectul I

1. *Să se arate că ecuaţia* $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ *nu are soluţii în numere naturale nenule.*

2. *Fie două triunghiuri* ABC *şi* $A'B'C'$ *care au acelaşi centru de greutate. Să se calculeze suma*:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

3. a) *Definiţi probabilitatea condiţionată.*

b) *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. *Alegem patru numere distincte din mulţimea* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Notăm cu* p_n *probabilitatea ca aceste patru numere să formeze o progresie aritmetică cu raţia strict pozitivă. Să se calculeze* p_n.

Subiectul II

1. *Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $G = [a, +\infty)$ *să fie parte stabilă a lui* $\mathbb{R}$ *în raport cu legea de compoziţie* $x * y = xy - 2x - 2y$, *cu* $x, y \in \mathbb{R}$.

2. *Să se determine valoarea maximă a funcţiei* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^5 x.$$

3. *Să se calculeze*:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{4 + \cos t}.$$

[1]) Profesor, Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti

[2]) Profesor, Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti

Subiectul III

1. *Proiectaţi unitatea de învăţare: „Progresii geometrice“, precizând definiţia unităţii de învăţare.*

2. *Pentru tema „Şiruri monotone“, alcătuiţi un test formativ din trei itemi, menţionând definiţia testului formativ.*

3. *Elaboraţi o propunere de opţional (Curriculum la decizia şcolii – C. D. Ş) în maximum o pagină, care să abordeze următoarele aspecte*:

a) *titlul opţionalului*;

b) *conţinutul opţionalului*;

c) *argument care să motiveze propunerea opţionalului şi care să se refere la unul dintre următoarele aspecte: nevoi ale elevilor, nevoi ale comunităţii locale, formarea unor competenţe de transfer.*

Notă:

• Toate subiectele sunt obligatorii.

• Fiecăreia dintre cele trei probleme ale unui subiect i se va acorda 10 puncte.

• Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.

Soluţii

Subiectul I

1. Dacă x, y, z este o soluţie a ecuaţiei din enunţ, rezultă că există cel mai mare număr natural k cu proprietatea că 2^k divide pe x, y, z. Deci există $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $x = 2^k a$, $y = 2^k b$, $z = 2^k c$. Din alegerea numărului natural k rezultă că cel puţin unul dintre numerele naturale a, b şi c este număr impar. Înlocuind în ecuaţie obţinem:

$$2^{2k}a^2 + 2^{2k}b^2 + 2^{2k}c^2 = 2^{3k+1}abc, \tag{1}$$

sau, după simplificare:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^{k+1} \cdot abc. \tag{2}$$

Pentru ca (2) să aibă loc, este necesar ca unul dintre numerele a, b, c să fie par şi celelalte impare. În acest caz, membrul stâng al relaţiei (2) este de forma $4m + 2$, iar membrul drept este de forma $4n$ (multiplu de 4). Contradicţie. În concluzie, rezultă că ecuaţia din enunţ nu are soluţii numere naturale nenule.

Observaţie. Se observă că, utilizând aceeaşi idee, se poate demonstra că oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$, ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 2axyz$ nu admite decât soluţia $x = y = z = 0$.

Comentariu. Problema a fost considerată dificilă de foarte mulţi candidaţi. Au existat puţini candidaţi care au rezolvat-o corect. Dificultatea a constat în faptul că puţini concurenţi au dovedit că ştiu să lucreze corect cu clasele de resturi modulo n.

2. Notând cu G centrul de greutate al triunghiului ABC şi cu G' centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CC'} = \\ &= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}\right) + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}\right) + \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}\right) + \\ &+ \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}\right) + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}\right) + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}\right) + \\ &+ \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}\right) + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}\right) + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}\right) = \\ &= 3\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}\right) + 3\left(\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}\right) + 9\overrightarrow{GG'}.\end{aligned}$$

Ţinând seama că $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$ şi $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{0}$, obţinem $\overrightarrow{S} = 9\overrightarrow{GG'}$.

În particular, când $G \equiv G'$, obţinem $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}$.

Comentariu. Problema nu a pus dificultăţi candidaţilor; mare parte din ei au rezolvat-o cu destul de multă uşurinţă.

3. a) Fie A şi B evenimente cu $P(A) \neq 0$. Atunci, probabilitatea ca să aibă loc evenimentul B în condiţiile în care a avut loc evenimentul A este dată de formula $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ şi se numeşte probabilitatea condiţionată a evenimentului B în raport cu evenimentul A.

b) Prin definiţie probabilitatea căutată este:

$$p_n = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}. \tag{1}$$

Numărul de cazuri posibile este egal cu C_n^4. (2)

Să calculăm numărul de cazuri favorabile.

Fie a primul termen şi r raţia progresiei aritmetice; atunci progresia este de forma $\div a, a+r, a+2r, a+3r$, cu:

$$a \geq 1 \quad \text{şi} \quad a + 3r \leq n. \tag{3}$$

Din (2) va rezulta:

$$1 + 3r \leq a + 3r \leq n \Rightarrow 1 + 3r \leq n \Rightarrow r \leq \frac{n-1}{3}$$

şi din faptul că $r \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $r \in \left\{1, 2, 3, \ldots, \left[\dfrac{n-1}{3}\right]\right\}$.

Deducem că numărul de cazuri favorabile este:

$$\sum_{r=1}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} (n - 3r) = n\left[\frac{n-1}{3}\right] - 3\frac{\left[\dfrac{n-1}{3}\right]\left[\dfrac{n-1}{3} + 1\right]}{2}. \tag{4}$$

Înlocuind în (1) numărul de cazuri posibile din (2) şi numărul de cazuri favorabile din (4), obţinem în final:

$$p_n = \frac{\left[\frac{n-1}{3}\right]\left(2n - 3\left[\frac{n-1}{3}\right] - 3\right)}{2C_n^4}. \tag{5}$$

Observaţie. Problema se poate generaliza în modul următor:

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ *şi* $n \geq k \geq 3$. *Să se determine probabilitatea ca alegând* k *elemente distincte din mulţimea* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *acestea să fie în progresie aritmetică.*

Făcând un raţionament asemănător, se determină probabilitatea:

$$p_n = \frac{\left[\frac{n-1}{k-1}\right]\left(2n - (k-1)\left[\frac{n-1}{k-1}\right] - k + 1\right)}{2C_n^k}.$$

Comentariu. Problema a fost apreciată de candidaţi ca foarte dificilă şi de aceea rezolvările nu au fost complete. S-a remarcat faptul că puţini candidaţi au făcut dovada că deţin noţiuni de combinatorică şi noţiuni de teoria probabilităţilor.

Subiectul II

1. Dacă $x = y = a$, atunci avem $a * a = a^2 - 4a$ şi din faptul că $a * a \in G$, rezultă $a^2 - 4a \geq a$ şi apoi $a^2 - 5a \geq 0$ ceea ce este echivalent cu $a \in (-\infty, 0] \cup [5, \infty)$. Avem de analizat două cazuri:

1) $a \in [5, \infty)$ şi 2) $a \in (-\infty, 0]$.

Cazul 1). Dacă $a \in [5, \infty)$, atunci oricare ar fi $x, y \in [a, +\infty)$ avem:

$$x * y = xy - 2x - 2y = (x-2)(y-2) - 4 \geq (a-2)(a-2) - 4 = a^2 - 4a \geq a.$$

Am demonstrat că pentru $a \in [5, \infty)$, $G = [a, +\infty)$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie dată.

Cazul 2). Dacă $y = 1 \in [a, +\infty)$ rezultă:

$$x * y = x * 1 = x \cdot 1 - 2x - 2 = -x - 2 \geq a, \quad \forall\, x \in [a, +\infty).$$

Acest lucru este fals. Este suficient să tindem cu $x \to \infty$ şi obţinem o contradicţie. Deci $(-\infty, 0]$ nu poate fi parte stabilă.

În concluzie mulţimea căutată este $G = [5, +\infty)$.

Comentarii. Problema a fost abordată de mulţi concurenţi, dar marea majoritate au demonstrat numai că $a \in (-\infty, 0] \cup [(5, +\infty)$. Cazul când $a \in (-\infty, 0]$ a fost abordat de puţini concurenţi, care nu au dat soluţii complete.

S-a observat că nu s-a înţeles în profunzime noţiunea de parte stabilă în raport cu o lege de compoziţie internă, cu toate că astfel de tipuri de probleme se găsesc din abundenţă în culegerile de probleme şi în manualele alternative.

2. Problema în sine prezintă un anumit interes, motiv pentru care o vom soluţiona prin mai multe metode.

Metoda 1. Vom studia maximul funcţiei

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^3 x \cos^5 x$$

cu ajutorul derivatei de ordinul întâi.

Prin derivare se obţine $f'(x) = \sin^2 x \cos^4 x \left(3 - 8\sin^2 x\right)$. Alcătuim următorul tabel de variaţie al funcţiei:

x	0		$\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0
$f(x)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$f\left(\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ Max	$\searrow\searrow\searrow$	0

Calculăm:

$$f\left(\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left[\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right]^3 \cdot \left[\cos\left(\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right]^5 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \left(\sqrt{1 - \frac{3}{8}}\right)^5 = \frac{75\sqrt{15}}{4096}.$$

În concluzie, valoarea maximă a funcţiei este egală cu $\frac{75\sqrt{15}}{4096}$.

Metoda 2. Funcţia se mai poate scrie sub forma:

$$f(x) = \left(\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos^2 x\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Notând $\cos^2 x = y$ şi $\sin^2 x = 1 - y$, obţinem o funcţie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(y) = (1-y)^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{5}{2}}$. Derivând în raport cu y obţinem:

$$g'(y) = (1-y)^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{3}{2} y^{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} + \frac{5}{2}(1-y)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}\right] = (1-y)^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{5 - 8y}{2}.$$

Facem tabelul de variaţie pentru funcţia g şi obţinem:

y	0		$\frac{5}{8}$		1
$g'(y)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0
$g(y)$	0	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$g\left(\frac{5}{8}\right)$ Max	$\searrow\searrow\searrow$	0

Calculăm $g\left(\frac{5}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{75\sqrt{15}}{4096}$.

Metoda 3. Vom demonstra următoarea:

Lemă. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, *cu proprietatea că* $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1$. *Atunci este adevărată următoarea inegalitate*:

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \le a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

Egalitatea are loc numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstraţie. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$. Evident:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0,\ \ \forall\, x \in (0, +\infty) \tag{1}$$

şi rezultă că funcţia este strict convexă. Aplicând inegalitatea lui *Jensen* avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} a_if(x_i), \quad \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n > 0. \tag{2}$$

Înlocuind în (2) funţia f obţinem:

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} -a_i \ln x_i. \tag{3}$$

Înmulţind cu (-1) se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i \le \ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\right). \tag{4}$$

Dezvoltând după i:

$$a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \ldots + a_n \ln x_n \le \ln\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\right), \tag{5}$$

sau:

$$\ln\left(x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}\right) \le \ln\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n\right),$$

ceea ce implică:

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \le a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \tag{6}$$

adică inegalitatea propusă. În inegalitatea lui *Jensen* avem egalitate când $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Vom demonstra următoarea:

Teoremă. *Fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ *şi* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$ (*dat*). *Atunci este adevărată următoarea inegalitate*:

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \le a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot \frac{1}{a^a}\left(x_1 + \ldots + x_n\right)^a,\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in (0, \infty).$$

Demonstraţie. Aplicăm Lema precedentă şi obţinem:

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} = \left(x_1^{\frac{a_1}{a}} \cdot x_2^{\frac{a_2}{a}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\frac{a_n}{a}}\right)^a =$$

$$= \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{a_1}{a}} \cdot \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{a_2}{a}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a}} \cdot a_1^{\frac{a_1}{a}} \cdot a_2^{\frac{a_2}{a}} \cdot \ldots \cdot a_n^{\frac{a_n}{a}} \right]^a =$$

$$= a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot \left[\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{a_1}{a}} \cdot \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{a_2}{a}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a}} \right]^a \leq$$

$$\leq a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot \left(\frac{a_1}{a} \cdot \frac{x_1}{a_1} + \frac{a_2}{a} \cdot \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{a_n}{a} \cdot \frac{x_n}{a_n} \right)^a =$$

$$= a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a} \right)^a =$$

$$= a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot \frac{1}{a^a} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^a . \tag{1}$$

Egalitatea are loc când $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$.

Corolar. *Dacă $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, înlocuind în inegalitatea* (1) *din teoremă, obţinem*:

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \leq \frac{1}{a^a} \cdot a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n}. \tag{2}$$

Avem egalitate pentru $x_i = \frac{a_i}{a}$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă în (2) considerăm $x_1 = \sin^2 x$, $x_2 = \cos^2 x$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ şi $a = a_1 + a_2 = 4$, vom obţine:

$$\left(\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos^2 x\right)^{\frac{5}{2}} = \sin^3 x \cdot \cos^5 x \leq \frac{1}{4^4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{75\sqrt{15}}{4096}.$$

Observaţie. Problema poate fi abordată la cazul general:
Să se determine valoarea maximă a funcţiei:

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^p x \cdot \cos^q x,\ p, q \in \mathbb{N}.$$

Aplicăm corolarul pentru cazul când $a_1 = \frac{p}{2}$, $a_2 = \frac{q}{2}$, $a = a_1 + a_2 = \frac{p+q}{2}$, $n = 2$ şi obţinem:

$$f_{\max} = \frac{1}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^{\frac{p+q}{2}}} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}} .$$

Comentarii. Marea majoritate a concurenţilor (candidaţilor) au abordat problema folosind prima metodă. O parte dintre ei au fost depunctaţi deoarece nu au făcut tabelul de variaţie al funcţiei f, de unde rezulta cu uşurinţă $x = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$ ca punct de maxim.

Mai facem precizarea că doar un număr redus de candidaţi au dus calculele până la capăt.

3. Pentru început vom demonstra următoarea:

Teoremă. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi perodică de perioadă* $T>0$. *Atunci este adevărată următoarea egalitate*:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Să notăm cu $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f şi cu g funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$. Avem:

$$g'(x)=(F(x+T)-F(x))'=f(x+T)-f(x)=0,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Deci funcţia g este constantă şi atunci oricare ar fi $k\in\mathbb{Z}$, rezultă:

$$g(kT)=g(0),$$

de unde:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, k\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Dacă $x>0$ rezultă că există un unic număr natural k_x cu proprietatea:

$$k_xT\le x<(k_x+1)T. \tag{2}$$

Atunci:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{2T} f(t)\mathrm{d}t+\ldots+\int_{(k_x-1)T}^{k_xT} f(t)\mathrm{d}t+\int_{k_xT}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Ţinând seama de (1) avem:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{k_x}{x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{k_xT}^{x} f(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Deoarece funcţia f este continuă şi periodică, este mărginită şi vom avea:

$$\left|\frac{1}{x}\int_{k_xT}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{x}\int_{k_xT}^{x}|f(t)|\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{x}\,|x-k_xT|\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\le\frac{T}{x}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f|, \tag{4}$$

$\forall\, x \in (0, \infty)$ şi deci:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{k_x T}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

Trecând la limită în (3) şi ţinând seama de (5) avem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \frac{k_x}{x} \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{kx}{x}.$$

Ţinând seama de (2) va rezulta că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k_x}{x} = \dfrac{1}{T}$. Vom obţine:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Revenind la problema propusă observăm că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{4+\cos t}$ este continuă şi periodică de perioadă $T = 2\pi$.

Aplicând (6) vom avea:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t}. \tag{7}$$

Totul se reduce la calculul integralei $I = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t}$.

Avem succesiv:

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t} = \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t} + \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t} = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t}.$$

Integrala definită $J = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t}$ se calculează cu ajutorul schimbării de variabilă $x = 2\mathrm{arctg}u$ şi vom obţine:

$$J = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{4 + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{5+3u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

şi:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{15}} = \frac{2\pi\sqrt{15}}{15}.$$

Atunci:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{4+\cos t}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Observaţii. 1) Problema pusă în discuţie poate fi generalizată sub următoarea:

Teoremă. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi periodică de perioadă* $T>0$. *Dacă* $a,b>0$, *atunci avem*:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^b f(tx)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{ax}^{bx}f(t)\mathrm{d}t;$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_{ax}^{bx}f(t)\mathrm{d}t=\frac{b-a}{T}\cdot\int\limits_0^T f(t)\mathrm{d}t.$

Demonstraţie. a) Egalitatea de la punctul a) se obţine cu ajutorul schimbării de variabilă $u=tx$, de unde $\mathrm{d}u=x\mathrm{d}t$ şi pentru $t=a$ rezultă $u=ax$, iar pentru $t=b$ rezultă $u=bx$. Înlocuind obţinem:

$$\int_a^b f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(u)\mathrm{d}u\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\int_a^b f(tx)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(u)\mathrm{d}u.$$

b) Avem:

$$\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_{ax}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{bx}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{bx}f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^{ax}f(t)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{b}{bx}\int_0^{bx}f(t)\mathrm{d}t-\frac{a}{ax}\int_0^{ax}f(t)\mathrm{d}t.$$

Aplicând teorema demonstrată anterior în final avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{bx}\int_0^{bx}f(t)\mathrm{d}t-\lim_{x\to\infty}\frac{a}{ax}\int_0^{ax}f(t)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{b}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\frac{a}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\frac{b-a}{T}\cdot\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Pentru cazul particular $a=0$, $b=1$, $T=2\pi$ şi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{1}{4+\cos t}$ se obţine limita cerută în problemă.

2. Problema propusă se poate generaliza în modul următor:

Fie $0 < a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $I(\alpha, x) = x^{\alpha} \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{4 + \cos tx}$.

Atunci avem:

$$\lim_{x\to\infty} I(\alpha, x) = \begin{cases} 0, & \alpha \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{\sqrt{15}}{15}, & \alpha = -1 \\ +\infty, & \alpha \in (-1, +\infty). \end{cases}$$

Comentarii. Problema a fost considerată de concurenţi ca fiind foarte dificilă. Nu au existat soluţii complete, o mare parte din candidaţi preferând să nu abordeze problema. Un număr de candidaţi au încercat să rezolve problema aplicând direct regula lui *l'Hospital*, trăgând concluzia falsă că limita nu există (nu au verificat condiţiile de aplicabilitate a regulei).

Mulţi candidaţi au încercat să calculeze direct $\int\limits_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{4 + \cos t}$ cu ajutorul schimbării de variabilă $u = 2\mathrm{arctg}t$, neţinând seama de faptul că funcţia este periodică de perioadă $T = 2\pi$ şi de faptul că această schimbare de variablă implică aplicarea procedeului de lipire a primitivelor, procedeu care nu a fost cunoscut şi aplicat în mod riguros.

Unele consideraţii de ordin general. Problemele propuse la acest concurs au atins puncte sensibile din problemistica matematică. Pentru rezolvarea lor este necesară o înţelegere a fundamentelor legate de anumite definiţii şi proprietăţi matematice. Tratarea acestor subiecte solicită din partea rezolvitorului cunoaşterea şi aplicarea în mod corect a unor cunoştinţe de teoria numerelor (lucru cu clase de resturi modulo n); combinatorică şi calculul probabilităţilor; structuri algebrice (înţelegerea corectă a noţiunii de „parte stabilă"); determinarea corectă a extremelor unor funcţii (în particular şi din funcţii trigonometrice); proprietăţi legate de calculul unor integrale definite din funcţii continue şi periodice – şi, nu în ultimul rând, şi cunoştinţe de calcul vectorial.

Cerinţele cuprind o arie destul de mare de cunoştinţe matematice de algebră, geometrie, trigonometrie şi analiză matematică.

Prin rezultatele îngrijorătoare ale acestui concurs se trage un semnal pentru toţi cei care doresc să participe în viitor la un asemenea concurs. Pentru ca reuşita să fie asigurată este necesară o exersare pe o problemistică variată şi delicată care poate fi furnizată atât de culegerile de probleme şi manualele şcolare alternative, dar şi de concursurile şi olimpiadele de matematică.

DIDACTICA MATEMATICII

Metode active în didactica matematicii

Neculai Stanciu[1)]

Abstract. Mathematics is one of the gate keepers for success in all fields of life.
The first question which arises in our mind as techers that why should we teach Mathematics to our students? One of the main objectives of teaching and learning Mathematics is to prepare students for practical life. Students can develop their knowledge, skills; logical and analytical thinking while learning Mathematics and all these can lead them for enhancing their curiosity and to develop their ability to solve problems in almost all fields of life. This problem solving nature of Mathematics can be found in subdisciplines of Mathematics such as in geometry, calculus, arithmetic and algebra. That's why it is common saying the Mathematics is mother of all subjects.
This article illustrate practical use active methods of mathematics lessons.
Keywords: Goals of mathematics teaching, curriculum development, teaching methods and classroom techniques, lesson preparation. Methodology of mathematics, didactics.
MSC : 00A35

Procesul de predare şi învăţare este, în cea mai mare parte, un proces de comunicare între cel care predă (profesorul) şi cei care învaţă (elevii). Cele două componente ale acestui proces – predarea şi învăţarea – sunt ele însele, în bună măsură, procese de comunicare sau care implică în mod direct comunicarea. A preda înseamnă a elabora şi a transmite mesaje, iar a învăţa (cu sensul de a învăţa în clasă, în relaţie cu profesorul) înseamnă a recepta şi a asimila mesaje. Fireşte, procesul real al comunicării este mult mai complex. A învăţa în procesul de învăţământ nu se reduce la a recepta, ci implică participarea activă a elevului în ambele ipostaze, de receptor şi emitent de mesaje, după cum a preda nu se limitează la a transmite, ci implică şi actul receptării şi al reacţiei de feed-back la mesaje emise de elevi, schimbarea dinamică a rolurilor fiind una din condiţiile principale ale comunicării eficiente în procesul de învăţământ. Important este faptul că procesul de predare – învăţare în matematică poate fi mai bine înţeles şi mai bine condus dacă se cunosc şi se aplică câteva dintre metodele active, care se potrivesc acestei discipline. În cele ce urmează vă prezentăm utilizarea câtorva dintre aceste metode active folosite de noi la clasă – le vom exemplifica printr-un proiect didactic.

[1)] Profesor, Şc. gen. „George Emil Palade“, Buzău

Proiect didactic

Clasa a VIII-a
Obiectul: Matematica / Algebră
Subiectul: Funcţii
Tipul lecţiei: Lecţie de consolidare
Obiectivele lecţiei (1.4,1.5,2.2,2.3,2.6)
Obiective de referinţă:

1. Cunoaşterea şi înţelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcule specifice matematicii:

1.4. să aplice în rezolvarea problemelor elemente de logică şi elemente de teoria mulţimilor;

1.5. să identifice funcţii de gradul I (domeniul $\mathbb{R}$ sau o mulţime finită) şi să le reprezinte grafic.

2. Dezvoltarea capacităţii de explorare/investigare şi de rezolvare a problemelor:

2.2. să identifice reguli de formare a unor şiruri şi formule de definire a unor funcţii ;

2.3. să analizeze veridicitatea unor rezultate obţinute prin procedee diverse (măsurare, calcul, raţionament);

2.6. să determine, folosind metode adecvate (măsurare şi/sau calcul) lungimi de segmente , măsuri de unghiuri, arii şi volume.

3. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic.

4. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate.

Obiective operaţionale:

a) cognitive:
– să reprezinte grafic o funcţie de gradul I;
– să calculeze coordonatele punctului de intersecţie a graficelor pentru două funcţii date;
– să determine o funcţie în condiţiile date.

b) afective:
– stimularea curiozităţii şi dezvoltarea simţului critic;
– dezvoltarea spiritului de observaţie şi a concentrării în rezolvarea problemelor;
– concentrarea afectivă la lecţie.

Metode şi procedee didactice: conversaţia, lucrul în echipă, demonstraţia, mozaicul,turul galeriei.

Mijloace de învăţământ: manual, culegeri, instrumente geometrice, markere, coli A3.

Desfăşurarea lecţiei

1) *Etapa organizatorică.* Se notează absenţii, se verifică tema pentru acasă, comentându-se ideile de rezolvare enunţate de elevi, se captează atenţia clasei prin anunţarea temei lecţiei şi a obiectivelor 2min

2) *Reactualizarea cunoştinţelor.* Metoda Mozaicului. Clasa se împarte în grupe de câte 4-5 elevi, aleatoriu. Fiecare grupă primeşte o temă teoretică (alta pentru fiecare grupă), care se găseşte pe fişa nr. 1 de lucru, pe care o vor rezolva împreună timp de 10 min, o vor redacta pe un poster care va fi afişat pe tablă sau pe un alt suport. Un reprezentant al grupei ales de elevi, va prezenta răspunsurile argumentând. Membrii celorlalte grupe pot pune întrebări, pot cere lămuriri sau completări. În acest timp profesorul completează ghidul de observare al elevilor. Dacă este nevoie profesorul sau elevii pot interveni 15min

3) *Fixarea cunoştinţelor.* În continuare, fiecărei grupe i se va cere să rezolve problema corespunzătoare de pe aceeaşi fişă nr. 1 pe care au primit-o. Această problemă va fi rezolvată de asemenea în echipă şi va fi redactată pe un poster pe care îl au la dispoziţie. Grupele rămân aceleaşi. În cadrul grupului pot apărea discuţii „certuri" toate însă constructive. Elevii pot cere profesorului, pe parcursul activităţii, informaţii, lămuriri suplimentare, asupra enunţului, cerinţei, realizării desenului, demonstraţiei, etc. Toate posterele vor fi de asemenea afişate pe pereţii clasei .... 15 min.

Urmează *turul galeriei.* Grupele, într-o ordine bine stabilită, trec prin faţa posterelor celorlalte grupe, menţionând folosind culoarea caracteristică grupei, observaţii, aprecieri (corecte sau nu) asupra modului de redactare, apreciind prin note. Aceştia trebuie să-şi argumenteze observaţiile, criticile şi metodele. Se impune supravegherea permanentă a elevilor pentru desfăşurarea în condiţii optime a lecţiei .... 15 min.

Se vor discuta şi alte metode de rezolvare a problemelor propuse.

Concluzii şi aprecieri: 3min

– ale profesorului: orale, criticând (dacă este cazul), dar mai ales încurajând elevii.

– ale elevilor: vor completa fără semnătură, biletele ce vor fi introduse în „valiza activităţii"

4) *Tema pentru acasă.* Problemele din Fişa de lucru nr.2 .... 3min

Ulterior profesorul va întocmi fişa de evaluare a grupelor şi implicit a clasei stabilind măsurile de eliminare sau îndepărtare a deficienţelor.

Pentru evaluarea activităţilor desfăşurate se utilizează:

– Fişă de apreciere individuală şi

– Chestionar de evaluare a lecţiei / activităţii.

Fişa de lucru 1

Funcţii – metode active –

Reactualizarea cunoştinţelor

Clasa a VIII-a

Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$, $g(x) = x - 5$. Se cere:

Grupa 1

1) determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale G_f cu axele Ox şi Oy;

2) reprezentaţi grafic funcţia f;

3) determinaţi coordonatele punctului de intersecţie ale graficelor funcţiilor f şi g;

Grupa 2

1) determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale G_g cu axele Ox şi Oy;

2) reprezentaţi grafic funcţia g;

3) determinaţi coordonatele punctului de intersecţie ale graficelor funcţiilor f şi g;

Grupa 3

1) distanţa dintre punctele de intersecţie ale G_f cu axele de coordonate;

2) perimetrul şi aria triunghiului format de graficul lui f cu axele;

Grupa 4

1) distanţa dintre punctele de intersecţie ale G_g cu axele de coordonate;

2) perimetrul şi aria triunghiului format de graficul lui g cu axele;

Grupa 5

1) distanţa de la origine la graficul funcţiei f;

2) raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiului format de graficul lui f cu axele;

Grupa 6

1) distanţa de la origine la graficul funcţiei g;

2) raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiului format de graficul lui g cu axele;

Fixarea cunoştinţelor

Grupa 1

1) rezolvaţi ecuaţia: $\dfrac{f(x)+g(-2)}{3}=4$;

Grupa 2

2) rezolvaţi inecuaţia: $f(x)+2f(1)\geq 6$;

Grupa 3

3) determinaţi coordonatele punctului de pe graficul funcţiei f, care are ordonata triplul abscisei;

Grupa 4

4) arătaţi că $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$;

Grupa 5

5) Care dintre punctele: $A(1,-4)$, $B(0,-6)$, $C(-10,-26)$ se găsesc pe graficul funcţiei f?

Grupa 6

6) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $(a-2)f(-4)+1=0$.

Fişa de lucru 2

Temă pentru acasă

(în conformitate cu criteriile unice de evaluare la matematică, clasa a VIII-a)

Capitolul: Funcţii, clasa a VIII-a

pentru nota 5-6

1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Calculaţi:

a) $f(1)$; b) $f(0)$; c) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$; d) $f(-2)$; e) $f\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

2) Reprezentaţi grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

pentru nota 6-7

1) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele: a) $A(m;7)$; b) $B(m;-4)$; c) $C(4;m)$; d) $D(2;m)$ să aparţină graficului funcţiei.

2) Determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ ştiind că reprezentarea graficului funcţiei conţine punctele: $A(3;4)$ şi $B(-2;3)$.

pentru nota 7-8

1) Determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ care are ca reprezentare grafică dreapta AB cu $A(\sqrt{3}+1,\sqrt{3})$ şi $B(2,-1)$

2) Determinaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{6}$, cu axele de coordonate $x'x$ şi $y'y$.

pentru nota 9-10

1) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.

a) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $(a-2)f(a)+1=0$.

b) Determinaţi $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(-b+1)=f(b+1)-f(b-1)$.

c) Determinaţi un punct al graficului care are coordonatele numere opuse.

2) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(2-\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}$.

a) Arătaţi că punctul $A(1;2)$ aparţine graficului funcţiei.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ inecuaţia $f(x)-2>0$.

c) Determinaţi numerele raţionale a, b pentru care punctul $M\left(a;b+b\sqrt{5}\right)$ aparţine graficului funcţiei f.

Fişă de apreciere individuală:

Unitatea de învăţământ

Data.........
Clasa ....
Profesor ....
Elev ....

La sfârşitul lecţiei completaţi spaţiile libere:

1. Am învăţat că ....
2. Am descoperit că ....
3. Am fost surprins de faptul că ....
4. Am folosil metoda .... deoarece ....

În realizarea sarcinilor am întâmpinat următoarele dificultăţi . . . .

Vă mulţumesc pentru sinceritate !

Chestionar de evaluare a lecţiei / activităţii

Unitatea şcolară

Data . . . .
Profesor . . . .
Elev . . . .

1. Marcaţi pe scala de mai jos utilitatea acestei lecţii/activităţi, din perspectiva activităţii dvs.

0 1 2 3 4 5
inutil foarte util

2. Apreciaţi lecţia /activitatea de astăzi

0 1 2 3 4 5
inadecvată foarte bună

3. Vă rugăm, enumeraţi 3 secvenţe care v-au captat interesul şi le-aţi reţinut pentru agenda dvs.

4. Au existat secvenţe complet neinteresante? Justificaţi, vă rugăm, răspunsul.

5. Profesorul a reuşit să fie . . . . . .

6. Cum v-aţi simţit în cadrul grupului?

7. Apreciaţi participarea dvs. în cadrul acestei activităţi . . . .

8. Sugestii . . . .

Vă mulţumesc pentru sinceritate !

Notă. Lecţia a fost filmată şi se găseşte pe `www.mateinfo.ro` .

BIBLIOGRAFIE

[1] www.didactic.ro
[2] www.edu.ro
[3] www.mateinfo.ro

PROBLEME PROPUSE

285. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere strict pozitive. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1+(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1})^2} > \frac{\pi}{2}.$$

În plus, dacă $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1+(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1})^2} > \frac{\pi}{4}.$$

Mai mult, constantele sunt optime. (În legătură cu o problemă propusă la Concursul „Traian Lalescu“ din anul 2009.)

Radu Gologan

286. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie strict descrescătoare şi derivabilă pe $(0, \infty)$ şi fie F o primitivă a ei. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:

i) şirul $\left(\dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right)_{n \geq 1}$ are limita 1;

ii) şirul $(F(n))_{n \geq 1}$ are limita 0;

iii) $\dfrac{f'}{f}$ este o funcţie strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

Atunci:

a) şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ este convergent (notăm cu x limita lui);

b) şirul $(u_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $u_n = \dfrac{x - x_n}{F(n)}$ este convergent (care este limita sa?) şi este strict monoton.

Marian Tetiva

287. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât:

$$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x \int_b^t f(x)\mathrm{d}x \neq 0, \ \forall\, t \in [a, b].$$

Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$(c - a)f(c) \left(\int_c^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Cezar Lupu şi **Tudorel Lupu**

288. Fie $p \geq 2$, $q \geq 2$ numere întregi cu $(p, q) = 1$. Să se demonstreze că numărul $\log_p q$ este transcendent.

Adrian Troie

289. Să se determine curbele plane care au proprietatea că raza vectoare a unui punct curent face un unghi constant α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ cu tangenta la curbă în punctul respectiv.

Adrian Corduneanu

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

264. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* V *spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult* $n-1$ *cu coeficienţi complecşi. Vom nota cu* id *aplicaţia identică a lui* V *şi pentru orice* $a \in \mathbb{C}$ *vom desemna prin* $u_a : V \to V$ *aplicaţia definită de egalitatea*:

$$u_a(p(x)) = p(x+a).$$

a) *Să se arate că mulţimea* $G = \{u_a\}_{a\in\mathbb{C}}$ *este un subgrup al grupului* $\mathrm{GL}(V)$ (*grupul automorfismelor lui* V) *izomorf cu grupul aditiv al numerelor complexe. Folosind acest rezultat, să se precizeze un subgrup al grupului* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (*grupul matricelor inversabile cu coeficienţi în* $\mathbb{C}$) *izomorf cu grupul aditiv* $\mathbb{C}$. *Să se determine inversa unei matrici din acest subgrup.*

b) *Pentru* $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, *se consideră în* V *polinoamele*:

$p_0(x) = 1,\ \ p_1(x) = \dfrac{x}{1!\cdot a},\ \ldots,\ \ p_{n-1}(x) = \dfrac{x(x-a)\cdot\ldots\cdot(x-(n-2)a)}{(n-1)!\cdot a^{n-1}}.$

Să se arate că familia $\{p_0, p_1 \ldots, p_{n-1}\}$ *constituie o bază în* V *şi să se scrie matricea endomorfismului* $u_a - \mathrm{id}$ *în raport cu această bază.*

c) *Pentru* $k \in \mathbb{N}$, *să se determine* $\ker(u_a - \mathrm{id})^k$ *şi* $\mathrm{im}(u_a - \mathrm{id})^k$.

d) *Fie* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

(i) $(\alpha u_a + \beta u_b)^n = o$;

(ii) $\ker(\alpha u_a + \beta u_b) \neq \{0\}$;

(iii) $\alpha + \beta = 0$.

Dan Radu

Soluţia autorului. a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi $p, q \in V$; atunci:

$$u_a(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha p(x+a) + \beta q(x+a) = \alpha u_a(p(x)) + \beta u_a(q(x)),$$

ceea ce arată că $u_a \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V)$. Pentru a arăta că G este subgrup în $\mathrm{GL}(V)$, să observăm că pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ avem:

$$(u_a \circ u_b)(p(x)) = u_a(u_b(p(x))) = u_a(p(x+b)) = p(x+a+b) = u_{a+b}(p(x))$$

şi deci $u_a \circ u_b = a_{a+b} \in G$. Cum pe de altă parte $u_0 = \mathrm{id}$, rezultă că $u_a^{-1} = u_{-a} \in G$, de unde, în baza criteriului subgrupului, conchidem că G este subgrup în $\mathrm{GL}(V)$. Evident, izomorfismul dintre grupul aditiv $\mathbb{C}$ şi grupul G este realizat de aplicaţia $\varphi : \mathbb{C} \to G$, dată de egalitatea $\varphi(a) = u_a$.

Să considerăm în V baza canonică $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Vom avea:

$u_a(e_0(x)) = e_0(x+a) = 1 = e_0(x)$

$u_a(e_1(x)) = e_1(x+a) = a + x = ae_0(x) + e_1(x)$

. . . .

$$\begin{aligned} u_a(e_{n-1}(x)) &= e_{n-1}(x) = (a+x)^{n-1} = a^{n-1} + C_{n-1}^1 a^{n-2} x + \ldots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} = \\ &= a^{n-1} e_1(x) + C_{n-1}^1 a^{n-2} e_1(x) + \ldots + C_{n-1}^{n-1} + e_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Urmează că matricea M_a a lui u_a în raport cu baza canonică va fi:

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \ldots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & & C_{n-1}^1 a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Uzând de izomorfismul $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, rezultă că G va fi izomorf cu subgrupul $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ constituit din toat matricile de forma M_a, unde a parcurge pe $\mathbb{C}$. Conchidem că grupul aditiv $\mathbb{C}$ este izomorf cu grupul multiplicativ $\mathcal{M} = \{M_a\}_{a\in\mathbb{C}}$. Din raţionamentele anterioare, deducem că pentru $M_a \in \mathcal{M}$, avem:

$$M_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & \dots & (-1)^{n-1}a^{n-1} \\ 0 & 1 & & C_{n-1}^1(-1)^{n-2}a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = M_{-a}.$$

b) Evident, deoarece familia considerată este constituită din n vectori, pentru a proba că este bază în V va fi suficient să verificăm liniar independenţa.

Să presupunem că:

$$\lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{C}.$$

Făcând în această egalitate $x = 0$, $x = a$, $\ldots$, $x = (n-1)a$, obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \lambda_0 & = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} & = 0, \end{cases}$$

de unde $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ şi deci liniar independenţa familiei considerate. Pentru a scrie matricea P_a a endomorfismelor $u_a - \mathrm{id}$ în raport cu această bază, să observăm că:

$$(u_a - \mathrm{id})\,(p_0(x)) = u_a\,(p_0(x)) - p_0(x) = 0,$$

iar pentru $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, avem:

$$\begin{aligned} &(u_a - \mathrm{id})\,(p_k(x)) = u_a\,(p_k(x)) - p_k(x) = p_k(x+a) - p_k(x) = \\ &= \frac{(x+a)x \cdot \ldots \cdot [x-(k-2)a]}{k!a^k} - \frac{x(x-a) \cdot \ldots \cdot [x-(k-1)a]}{k!a^k} = \\ &= \frac{x(x-a) \cdot \ldots \cdot [x-(k-2)a]}{(k-1)!a^{k-1}} = p_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea P_a va fi:

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci o matrice banală semibordată superior cu o diagonală de 1.

c) În raport cu baza considerată la pct. b), matricea aplicaţiei $(u_a - \mathrm{id})^k$ va fi P_a^k. Evident, P_a este nilpotentă de ordin n deoarece fiecare ridicare la o putere succesivă a lui P_a are drept efect deplasarea către dreapta cu o poziţie a bordului diagonal format din numărul 1. Urmează atunci că pentru $1 \le k \le n-1$ avem:

$$\ker(u_a - \mathrm{id})^k = S_p\,\{p_0(x), \ldots, p_{k-1}(x)\}\,,$$

$$\mathrm{im}(u_a - \mathrm{id})^k = S_p\,\{p_0(x), \ldots, p_{n-k-1}(x)\}\,,$$

iar pentru $k \ge n$:

$$\ker(u_a - \mathrm{id})^k = V,$$

$$\mathrm{im}(u_a - \mathrm{id})^k = \{o\}.$$

d) (i)$\Rightarrow$(ii). Deoarece proprietatea (i) este adevărată, rezultă că:

$$(\alpha u_a + \beta u_b) \circ (\alpha u_a + \beta u_b)^{n-1} = o$$

şi deci $\mathrm{im}\,(\alpha u_a + \beta u_b)^{n-1} \subseteq \ker\,(\alpha u_a + \beta u_b)$.

Dacă $\operatorname{im}(\alpha u_a + \beta u_b)^{n-1} \neq \{0\}$, atunci rezultă proprietatea (ii). În caz contrar, conchidem că $(\alpha u_a + \beta u_b)^{n-1} = 0$. În această situaţie este clar că procedând recursiv descendent vom ajunge la un moment dat la indicele de nilpotenţă k al endomorfismului $\alpha u_a + \beta u_b$ şi deci, pentru acest k, $\operatorname{im}(\alpha u_a + \beta u_b)^{k-1} \neq \{o\}$, iar $\operatorname{im}(\alpha u_a + \beta u_b)^{k-1} \subseteq$ $\subseteq \ker(\alpha u_a + \beta u_b)$, ceea ce demonstrează afirmaţia (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Plecând de la premiza (ii), există $p(x) \in V$ astfel încât:

$$(\alpha u_a + \beta u_b)(p(x)) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{C},$$

ceea ce este echivalent cu faptul că:

$$\alpha p(x+a) + \beta p(x+b) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{C}.$$

Să presupunem că $\operatorname{grad} p = k \leq n-1$. Atunci p se poate scrie sub forma:

$$p(x) = a_0 x^k + q(x),$$

cu $a_0 \neq 0$ şi $\operatorname{grad} q \leq k-1$. Urmează deci că:

$$\alpha p(x+a) + \beta p(x+b) = \alpha a_0 (x+a)^k + \alpha q(x+a) + \beta a_0 (x+b)^k + \beta q(x+b) = a_0(\alpha+\beta)x^k + r(x),$$

unde $\operatorname{grad} r \leq k-1$. Însă, după cum am presupus mai înainte, polinomul din membrul stâng este polinomul identic nul, aşa încât rezultă cu necesitate că $a_0(\alpha+\beta) = 0$. Cum însă $a_0 \neq 0$, conchidem că $\alpha + \beta = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i). Dacă $\alpha = \beta = 0$, implicaţia este trivială. În caz contrar, egalitatea (i) este echivalentă cu egalitatea:

$$(u_a - u_b)^n = 0.$$

Evident, pentru a proba egalitatea de mai sus este suficient să arătăm că:

$$(u_a - u_b)^n (e_k(x)) = 0,$$

pentru polinoamele e_k din baza canonică. Să observăm că:

$$(u_a - u_b)^n (e_0(x)) = 0.$$

Mai departe:

$$(u_a - u_b)^2 (e_1(x)) = (u_a - u_b)(e_1(x+a) - e_1(x+b)) =$$
$$= (u_a - u_b)((a-b)e_0(x)) = (a-b)(u_a - u_b)(e_0(x)) = 0.$$

Să presupunem că:

$$(u_a - u_b)^i (e_{i-1}(x)) = 0, \tag{1}$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, k\}$ şi să arătăm că de aici decurge faptul că:

$$(u_a - u_b)^{k+1} (e_k(x)) = 0. \tag{2}$$

Pentru aceasta, să observăm că:

$$(u_a - u_b)(e_k(x)) = (x+a)^k - (x+b)^k = \alpha_1 e_{k-1}(x) + \ldots + \alpha_k e_0(x)$$

şi deci:

$$(u_a - u_b)^{k+1} (e_k(x)) = (u_a - u_b)^k ((u_a - u_b)(e_k(x))) =$$
$$= (u_a - u_b)^k (\alpha_1 e_{k-1}(x) + \ldots + \alpha_k e_0(x)) =$$
$$= \alpha_1 (u_a - u_b)^k (e_{k-1}(x)) + \ldots + \alpha_k (u_a - u_b)^k (e_0(x)) = 0,$$

ultima egalitate fiind justificată de ipotezele (1) făcute. Rezultă, prin recurenţă, afirmaţia (2). Evident atunci că endomorfismul $(u_a - u_b)^n$ se anulează pe baza canonică a lui V şi, după cum observam mai la început, aceasta este suficient pentru ca afirmaţia (i) să fie adevărată.

265. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere pozitive care converge la* 0 *astfel încât*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty.$$

Atunci există un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ *al lui* $(x_n)_{n\geq 1}$ *astfel ca*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = \infty \qquad \text{şi} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^2 < \infty.$$

George Stoica

Soluţia autorului. Pentru $m \geq 1$ notăm:

$$A_m = \left\{ n : \frac{1}{m+1} \leq x_n < \frac{1}{m} \right\},$$

şi fie $\left(A_{m_j}\right)_{j\geq 1}$ subşirul format din mulţimile nevide ale lui $(A_m)_{m\geq 1}$.

Dacă:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} = \infty,$$

atunci construim subşirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ alegând câte un element din fiecare A_{m_j}.

Dacă:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j} < \infty,$$

construim subşirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ alegând $\min\left\{m_j, \mathrm{card} A_{m_j}\right\}$ elemente din fiecare A_{m_j} (card înseamnă cardinalul mulţimii respective). Se observă uşor că $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = \infty$ şi apoi că:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\min\left\{m_j, \mathrm{card} A_{m_j}\right\}}{m_j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m_j},$$

adică proprietatea din enunţ.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Să începem cu următoarea:

Lemă. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este un şir de numere reale pozitive, convergent la zero şi pentru care* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$, *iar* m *şi* N *sunt numere naturale nenule, atunci există numerele naturale* q *şi* p, $q > p \geq N$, *astfel încât*:

$$\sum_{n=p}^{q} x_k \geq \frac{1}{m} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=p}^{q} x_k^2 < \frac{2}{m^2}.$$

Demonstraţie. Deoarece (x_n) are limita 0, există $M \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n < \dfrac{1}{m}$ pentru orice $n \geq M$; în particular avem şi $x_n < \dfrac{1}{m}$, pentru orice $n \geq p := \max\{M, N\}$. Pe de altă parte ipoteza implică, evident, şi faptul că $\sum\limits_{n=p}^{\infty} x_n = \infty$, de aceea trebuie ca la un moment dat o sumă $\sum\limits_{n=p}^{s} x_n$ să fie $\geq \dfrac{1}{m}$. Să alegem pe q ca fiind indicele unde se produce schimbarea, deci q să fie acela cu proprietatea că:

$$\sum_{n=p}^{q-1} x_n < \frac{1}{m} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=p}^{q} x_n \geq \frac{1}{m}.$$

Astfel vedem că are loc prima inegalitate din enunţ pentru această alegere a lui p şi q.

Ca să vedem că şi a doua este verificată nu este greu de loc; avem:

$$\sum_{n=p}^{q} x_n^2 = \sum_{n=p}^{q-1} x_n^2 + x_q^2 < \frac{1}{m}\sum_{n=p}^{q-1} x_n + x_q^2 < \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = \frac{2}{m^2}.$$

Acum este destul de clar cum se rezolvă problema. Începem prin a alege un grup de termeni (consecutivi) ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ care au suma ≥ 1 şi suma pătratelor mai mică decât 1; alegem adică indicii $p_1 < q_1$ astfel încât:

$$\sum_{n=p_1}^{q_1} x_n \geq 1 \quad \text{şi} \quad \sum_{n=p_1}^{q_1} x_n^2 < 1.$$

Presupunând că am găsit, în general, numerele $p_1 < q_1 < \ldots < p_l < q_l$ astfel încât:

$$\sum_{n=p_i}^{q_i} x_n \geq \frac{1}{i} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=p_i}^{q_i} x_n^2 < \frac{1}{i^2},$$

pentru toţi $1 \leq i \leq l$, aplicăm lema pentru $N = q_l+1$, $m = i+1$ şi găsim $q_{l+1} > p_{l+1} \geq q_l+1$ astfel încât:

$$\sum_{n=p_{l+1}}^{q_{l+1}} x_n \geq \frac{1}{l+1} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=p_{l+1}}^{q_{l+1}} x_n^2 < \frac{1}{(l+1)^2}.$$

Atunci şirul de numere naturale $(n_k)_{k\geq 1}$ cerut în enunţ este:

$$p_1, p_1+1, \ldots, q_1, p_2, p_2+1, \ldots, q_2, p_3, \ldots;$$

într-adevăr, pentru această alegere avem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

şi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

şi demonstraţia este încheiată.

Observaţie. Fără îndoială că, absolut la fel, puem arăta că, în condiţiile enunţului, $\alpha > 0$ fiind dat, există un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel ca:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} = \infty \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^{1+\alpha} < \infty.$$

266. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \geq b \geq c$ şi $b^2 \geq ac$. Să se arate că funcţia $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dată prin:*

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x > 0$, este logaritmic concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Avem:

$$f(x) = \ln \varphi(x) = \frac{g(x)}{x},$$

unde $g(x) = \dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}$ pentru orice $x > 0$ şi trebuie să arătăm că f este concavă pe $(0, \infty)$. Se calculează imediat derivata a doua, $f''(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$, unde avem:

$$h(x) = x^2 g''(x) - 2xg'(x) + 2g(x), \quad \forall\, x > 0.$$

Evident, h se poate considera definită pe $[0, \infty)$ punând $h(0) = 0$, prin continuitate. Apoi, h este şi ea derivabilă, având derivata:

$$h'(x) = x^2 g^{(3)}(x) \leq 0, \quad \forall\, x \geq 0,$$

dacă reuşim să arătăm că g are derivata a treia negativă pe $[0, \infty)$. Atunci s-ar obţine $h(x) \leq h(0) = 0$ pentru $x \geq 0$, deci şi $f''(x) \leq 0$ pentru $x > 0$, ceea ce trebuia demonstrat. Ne mai rămâne aşadar să dovedim că $g^{(3)}(x) \leq 0$ pentru orice $x > 0$.

În acest scop calculăm:

$$g'(x) = \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x}$$

şi apoi:

$$g''(x) = \frac{(\ln a - \ln b)^2 a^x b^x + (\ln a - \ln c)^2 a^x c^x + (\ln b - \ln c)^2 b^x c^x}{(a^x + b^x + c^x)^2},$$

pentru a ajunge în cele din urmă la:

$$g^{(3)}(x) =$$

$$= \frac{1}{(a^x + b^x + c^x)^3} \left[\sum (\ln b - \ln a)^3 (a^x - b^x) + a^x b^x c^x \sum (\ln a - \ln b)^2 (\ln a + \ln b - 2\ln c) \right].$$

Sumele se fac după toate permutările circulare ale literelor a, b, c, iar cea de a doua sumă se dovedeşte a fi egală cu produsul:

$$(2\ln c - \ln a - \ln b)(2\ln b - \ln a - \ln c)(2\ln a - \ln b - \ln c).$$

Ipotezele asupra numerelor a, b, c arată că ultimii doi factori din acest produs sunt ≥ 0, iar primul este ≤ 0. Împreună cu faptul că:

$$\sum (\ln b - \ln a)^3 (a^x - b^x) \leq 0,$$

pentru $x > 0$ (evident), asta ne arată ce am dorit, adică ne arată că $g^{(3)}(x) \leq 0$ pentru orice $x > 0$ şi demonstraţia se încheie aici.

Extindere şi generalizare dată de *Ilie Bulacu*, Erhardt+Leimer Romania, PTS, Bucureşti.

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive astfel încât $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ şi $n \geq 3$.

1. Dacă $a_j^2 \leq a_{j-1} a_n$ pentru orice $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, atunci funcţia $f\colon (-\infty, 0) \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin:

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x < 0$, este logaritmic convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$.

2. Dacă $a_j^2 \geq a_1 a_{j+1}$, pentru orice $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, atunci funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin:

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x > 0$, este logaritmic concavă pe intervalul $(0, \infty)$.

Soluţie. Vom rezolva problema în trei paşi.

Pasul 1. În primul rând vom arăta că are loc identitatea:

$$(x-y)^2(x+y-2z)+(y-z)^2(y+z-2x)+(z-x)^2(z+x-2y) = (2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y),$$

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Pentru stabilirea acestei identităţi notăm:

$$P(x,y,z) = (x-y)^2(x+y-2z) + (y-z)^2(y+z-2x) + (z-x)^2(z+x-2y),\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R},$$

şi observăm că:

$$P(x,y,z) = P(y,z,x) = P(z,x,y),\ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$$

şi:

$$P\left(\frac{y+z}{2}, y, z\right) = P\left(x, \frac{z+x}{2}, z\right) = P\left(x, y, \frac{x+y}{2}\right) = 0,\ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare:

$$P(x,y,z) = a\left(x - \frac{y+z}{2}\right)\left(y - \frac{z+x}{2}\right)\left(z - \frac{x+y}{2}\right),\ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R},$$

unde $a \in \mathbb{R}$ şi a =const.. Identificând coeficienţii lui x^3, de exemplu, obţinem $\frac{a}{4} = 2$, adică $a = 8$.

În concluzie:

$$P(x,y,z) = (2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y),\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Observaţie. Prin calcul, se oţine forma desfăşurată a lui $P(x,y,z)$:

$$P(x,y,z) = 2\left(x^3+y^3+z^3\right) - 3\left(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\right) + 12xyz,\ \ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Pasul 2. În al doilea rând vom arăta că în condiţiile din enunţ au loc următoarele inegalităţi:

1. Dacă $a_j^2 \le a_{j-1}a_n$, pentru orice $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, atunci:

$$(\ln a_i - \ln a_j)^2 (\ln a_i + \ln a_j - 2\ln a_k) + (\ln a_j - \ln a_k)^2 (\ln a_j + \ln a_k - 2\ln a_i) +$$
$$+ (\ln a_k - \ln a_i)^2 (\ln a_k + \ln a_i - 2\ln a_j) \ge 0,\quad \forall\, i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\},\ i<j<k.$$

2. Dacă $a_j^2 \ge a_1 a_{j+1}$, pentru orice $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, atunci:

$$(\ln a_i - \ln a_j)^2 (\ln a_i + \ln a_j - 2\ln a_k) + (\ln a_j - \ln a_k)^2 (\ln a_j + \ln a_k - 2\ln a_i) +$$
$$+ (\ln a_k - \ln a_i)^2 (\ln a_k + \ln a_i - 2\ln a_j) \le 0,\quad \forall\, i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\},\ i<j<k.$$

Într-adevăr, conform cu identitatea de mai sus, avem:

$$(\ln a_i - \ln a_j)^2 (\ln a_i + \ln a_j - 2\ln a_k) + (\ln a_j - \ln a_k)^2 (\ln a_j + \ln a_k - 2\ln a_i) +$$
$$+ (\ln a_k - \ln a_i)^2 (\ln a_k + \ln a_i - 2\ln a_j) =$$
$$= (2\ln a_i - \ln a_j - \ln a_k)(2\ln a_j - \ln a_k - \ln a_i)(2\ln a_k - \ln a_i - \ln a_j).$$

Prima paranteză este pozitivă şi ultima paranteză este negativă, deoarece din $a_1 \ge \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n > 0$ rezultă că $a_i \ge a_j \ge a_k > 0$, pentru orice $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i<j<k$, iar paranteza din mijloc este negativă, respectiv, pozitivă, deoarece:

1. Dacă $a_j^2 \le a_{j-1}a_n$, $\forall\, j \in \{2,3,\ldots,n-1\}$, atunci $a_j^2 \le a_i a_k$, oricare ar fi $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i<j<k$.

2. Dacă $a_j^2 \ge a_1 a_{j-1}$, $\forall\, j \in \{2,3,\ldots,n-1\}$, atunci $a_j^2 \le a_i a_k$, oricare ar fi $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i<j<k$.

Pasul 3. Arătăm că funcţia $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$g(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n} = \frac{h(x)}{x},$$

unde:

$$h(x) = \ln \frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}, \ \ x \neq 0,$$

este convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi concavă pe intervalul $(0, \infty)$.

Calculând derivatele g' şi g'', avem succesiv:

$$g'(x) = \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2}, \quad x \neq 0;$$

$$g''(x) = \frac{x^2 \left[h'(x) + xh''(x) - h'(x)\right] - 2x\left[xh'(x) - h(x)\right]}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 h''(x) - 2xh'(x) + 2h(x)}{x^3}, \qquad x \neq 0.$$

Derivata numărătorului lui $g''(x)$ (care se poate defini şi în punctul $x = 0$) este egală cu $x^2 h^{(3)}(x)$, pentru orice $x \neq 0$, deoarece:

$$\left[x^2 h''(x) + 2xh'(x) + 2h(x)\right]' =$$

$$= x^2 h^{(3)}(x) + 2xh''(x) - 2xh''(x) - 2h'(x) + 2h'(x) = x^2 h^{(3)}, \quad \forall\, x \neq 0.$$

În continuare calculăm $h^{(3)}(x)$, oricare ar fi $x \neq 0$. Avem succesiv:

$$h(x) = \ln \frac{\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x}{n}, \quad \forall\, x \neq 0; \quad h'(x) = \frac{\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x \ln a_i}{\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x}, \quad \forall\, x \neq 0,$$

unde numărul termenilor de forma $a_i^x \ln a_i$ este C_n^1.

$$h''(x) = \frac{\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x \ln^2 a_i\right)\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right) - \left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x \ln a_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i^x a_j^x \left(\ln a_i - \ln a_j\right)^2}{\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right)^2}, \quad \forall\, x \neq 0,$$

unde numărul termenilor de forma $a_i^x a_j^x \left(\ln a_i - \ln a_j\right)^2$ este C_n^2.

$$h^{(3)}(x) = \frac{\left[\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i^x a_j^x \left(\ln a_i - \ln a_j\right)^2 \left(\ln a_i + \ln a_j\right)\right]\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right)}{\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right)^3} -$$

$$- \frac{2\left[\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i^x a_j^x \left(\ln a_i - \ln a_j\right)^2\right]\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x \ln a_i\right)}{\left(\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i^x\right)^3}, \quad \forall\, x \neq 0.$$

După efectuarea calculelor, obţinem:

$$h^{(3)}(x)=\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_i^x a_j^x\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^3\left(a_j^x-a_i^x\right)}{\left(\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^x\right)^3}+\frac{A}{\left(\sum\limits_{1\le i\le n} a_i^x\right)^3},\quad \forall\, x\neq 0,$$

unde:

$$A=\sum_{1\le i<j<k\le n} a_i^x a_j^x a_k^x\left[\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^2\left(\ln a_i+\ln a_j-2\ln a_k\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\ln a_j-\ln a_k\right)^2\left(\ln a_j+\ln a_k-2\ln a_i\right)+\left(\ln a_k-\ln a_i\right)^2\left(\ln a_k+\ln a_i-2\ln a_j\right)\right].$$

Numărul termenilor de forma $a_i^x a_j^x\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^3\left(a_j^x-a_i^x\right)$, cu $i<j$, este C_n^2, iar numărul termenilor de forma:

$$a_i^x a_j^x a_k^x\left[\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^2\left(\ln a_i+\ln a_j-2\ln a_k\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\ln a_j-\ln a_k\right)^2\left(\ln a_j+\ln a_k-2\ln a_i\right)+\left(\ln a_k-\ln a_i\right)^2\left(\ln a_k+\ln a_i-2\ln a_j\right)\right],$$

cu $i<j<k$, este C_n^3.

Pentru stabilirea semnului lui $h^{(3)}(x)$, pentru orice $x\neq 0$, şi a semnului lui $g''(x)$, distingem două cazuri:

1. Dacă $a_j^2<a_{j-1}a_n$ pentru orice $j\in\{2,3,\ldots,n-1\}$ şi $x<0$, atunci $a_i^x a_j^x\left(\ln a_i-\right.$ $\left.-\ln a_j\right)^3\left(a_j^x-a_i^x\right)\ge 0$, $i<j$, deoarece diferenţele $\ln a_i-\ln a_j$ şi $a_j^x-a_i^x$, cu $i<j$, au acelaşi semn, iar:

$$a_i^x a_j^x a_k^x\left[\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^2\left(\ln a_i+\ln a_j-2\ln a_k\right)+\left(\ln a_j-\ln a_k\right)^2\left(\ln a_j+\ln a_k-2\ln a_i\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\ln a_k-\ln a_i\right)^2\left(\ln a_k+\ln a_i-2\ln a_j\right)\right]\ge 0,\quad i<j<k,$$

conform cu inegalitatea de la pasul 2.

Deducem că $h^{(3)}(x)\ge 0$, pentru orice $x<0$, adică $x^2h^{(3)}(x)\ge 0$, oricare ar fi $x<0$.

Rezultă că numărătorul lui g'' creşte pe $(-\infty,0)$ şi valoarea sa pe $(-\infty,0)$ este cel mult egală cu valoarea în 0:

$$2h(0)=0.$$

Prin urmare $x^2h''(x)-2xh'(x)+2h(x)\le 0$, oricare ar fi $x<0$, deci $g''(x)\ge 0$, pentru orice $x<0$.

În concluzie, g este convexă pe intervalul $(-\infty,0)$, iar f este logaritmic convexă pe intervalul $(-\infty,0)$.

2. Dacă $a_j^2\ge a_1a_{j+1}$ pentru orice $j\in\{2,3,\ldots,n-1\}$ şi $x>0$, atunci $a_i^x a_j^x\left(\ln a_i-\right.$ $\left.-\ln a_j\right)^3\left(a_j^x-a_i^x\right)\le 0$, $i<j$, deoarece diferenţele $\ln a_i-\ln a_j$ şi $a_j^x-a_i^x$, cu $i<j$, au semne contrare, iar:

$$a_i^x a_j^x a_k^x\left[\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^2\left(\ln a_i+\ln a_j-2\ln a_k\right)+\left(\ln a_j-\ln a_k\right)^2\left(\ln a_j+\ln a_k-2\ln a_i\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\ln a_k-\ln a_i\right)^2\left(\ln a_k+\ln a_i-2\ln a_j\right)\right]\le 0,\quad i<j<k,$$

conform cu inegalitatea de la pasul 2.

Deducem că $h^{(3)}(x)\le 0$, oricare ar fi $x>0$, adică $x^2h^{(3)}(x)\le 0$, pentru orice $x>0$.

Rezultă că numărătorul lui g'' descreşte pe $(0,\infty)$ şi valoarea sa pe $(0,\infty)$ este cel mult egală cu valoarea în 0:

$$2h(0)=0.$$

Prin urmare $x^2h''(x)-2xh'(x)+2h(x)\le 0$, oricare ar fi $x>0$ şi deci $g''(x)\le 0$, oricare ar fi $x>0$.

În concluzie, g este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$, iar f este logaritmic concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Observaţii. 1. Funcţia f poate fi definită şi în $x = 0$ prin $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

2. Funcţia g poate fi definită şi în $x = 0$ prin $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = h'(0) = \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

3. Funcţiile g' şi g'' nu pot fi definite şi în $x = 0$ deoarece nu au limită în $x = 0$.

4. Funcţiile h, h', h'' şi $h^{(3)}$ pot fi definite şi în $x = 0$ prin $h(0) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$,

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} h'(x) = \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$h''(0) = \lim_{x\to 0} h''(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i<j\le n} (\ln a_i - \ln a_j)^2,$$

$$h^{(3)}(0) = \lim_{x\to 0} h^{(3)}(x) = \frac{1}{n^3} \sum_{1\le i<j<k\le n} \big[(\ln a_i - \ln a_j)^2 (\ln a_i + \ln a_j - 2\ln a_k) +$$

$$+ (\ln a_j - \ln a_k)^2 (\ln a_j + \ln a_k - 2\ln a_i) + (\ln a_k - \ln a_i)^2 (\ln a_k + \ln a_i - 2\ln a_j)\big].$$

5. Problema este adevărată şi în cazul $n = 2$, calculul făcându-se într-un singur pas (a se vedea [1]).

Caz particular. Pentru $n = 3$ obţinem următoarea extindere a problemei din enunţ

1. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \ge b \ge c$ şi $b^2 \le ac$ Să se arate că funcţia $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, dată prin:*

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x < 0$, este logaritmic convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$.

2. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a \ge b \ge c$ şi $b^2 \ge ac$ Să se arate că funcţia $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată prin:*

$$\varphi(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

pentru orice $x > 0$, este logaritmic concavă pe interalul $(0, \infty)$.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Tetiva, *Soluţia problemei nr. 249*, G. M.-A, nr. 4/2008, pag. 336-337.

Nota redacţiei. La problemă s-a mai primit o soluţie corectă de la domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

267. *Să se arate că*:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1} - 2\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1} > \frac{\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Szöllösy

Soluţia autorului. Pentru $n = 1$ inegalitatea este evidentă. Fie $n \ge 2$. Se ştie că $x + y + z = 0$ şi $\cos x \cos y \cos z \ne 0$ implică $\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}z = \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$. Fie:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{2n+1}.$$

Avem:

$$S_n=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}}\sum_{k=1}^{2n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\left(-\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}}\sum_{k=1}^{2n}\left(\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}-\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{2n+1}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}-\operatorname{tg}\pi+2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)=-(2n+1).$$

Dezvoltând S_n (în formă originală!) se constată că ultimul său termen este 0. Dintre cei $2n-1$ termeni nenuli ai sumei, cel mijlociu este $\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{(n+1)\pi}{2n+1}=-\operatorname{tg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$, iar în ceea ce priveşte ceilalţi termeni nenuli, efectuând reducerile la primul cadran se constată că ultimul termen coincide cu primul, penultimul cu cel de al doilea ş.a.m.d. În concluzie avem:

$$-(2n+1)=S_n=2\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{2n+1}-\operatorname{tg}^2\frac{n\pi}{2n+1}\geq$$

$$\geq 2\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}-\operatorname{tg}^2\frac{n\pi}{2n+1},$$

deci:

$$\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}\left(\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}-2\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\right)\geq 2n+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}-2\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\geq(2n+1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2n+1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}-2\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n+1}\geq\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(2n+1)}}{\frac{\pi}{2(2n+1)}}\cdot\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}.$$

268. *Fie cubul* $[ABCDA'B'C'D']$ *de muchie* a *şi punctele* $X\in(AB$, $Y\in(AD$ *şi* $Z\in(AA'$ *astfel încât* $AX=\alpha$, $AY=\beta$, $AZ=\gamma$, *unde* $\alpha,\beta,\gamma>a$ *şi*:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{1}{a},\quad \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}>\frac{1}{a},\quad \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{a}.$$

Planul (XYZ) *împarte cubul în două corpuri* $[C_1]$ *şi* $[C_2]$ *şi intersectează muchiile* $(A'B')$, (BB'), (BC), (CD), (DD') *şi* $(D'A')$ *în punctele* M, N, P, Q, R, S.

Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *Dreptele* MQ, NR *şi* PS *sunt concurente.*

2) *Sferele situate în interiorul corpurilor* $[C_1]$ *şi* $[C_2]$, *tangente planului* (XYZ) *şi feţelor triedrelor tridreptunghice cu vârfurile în* A, *respectiv* C', *au raze egale.*

3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{a}$.

Daniel Văcăreţu

Soluţia autorului. 1)⇔3) Considerăm reperul cu originea în A şi semidreptele $(AB$, $(AD$, $(AA'$ în calitate de semiaxe Ox, Oy, Oz. Planul (XYZ) are ecuaţia:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

Dreapta MQ este intersecţia planelor $(A'B'CD)$ şi (XYZ), deci ecuaţiile dreptei MQ sunt:

$$MQ: \begin{cases} y+z=a \\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1, \end{cases}$$

analog:

$$NR: \begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1, \end{cases}$$

$$PS: \begin{cases} x+z=a \\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1. \end{cases}$$

Dreptele MQ, NR şi PS sunt concurente dacă şi numai dacă sistemul format din ecuaţiile lor este compatibil determinat.

Aceste sistem este:

$$\begin{cases} y+z=a \\ x+y=a \\ x+z=a \\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1. \end{cases}$$

Subsistemul format din primele trei ecuaţii are soluţia $x=y=z=\dfrac{a}{2}$, care introdusă în a patra ecuaţie ne dă relaţia:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{a}.$$

Deci 1) $\Leftrightarrow$ 3).

Centrul sferei înscrisă în triedrul cu vârful în A este punctul $\Omega_1\left(\omega_1,\omega_1,\omega_1\right)$ şi distanţa de la Ω_1 la planul (XYZ) este $\omega_1 =$ raza sferei. Avem deci:

$$\frac{\left|\dfrac{\omega_1}{\alpha}+\dfrac{\omega_1}{\beta}+\dfrac{\omega_1}{\gamma}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}}=\omega_1.$$

Ω_1 şi A fiind de aceeaşi parte a planului (XYZ) avem:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\omega_1}{\alpha}+\frac{\omega_1}{\beta}+\frac{\omega_1}{\gamma}-1\right)=\operatorname{sign}\left(\frac{0}{\alpha}+\frac{0}{\beta}+\frac{0}{\gamma}-1\right)=-1.$$

Rezultă:

$$1-\omega_1\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=\omega_1\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1=\frac{1}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}}.$$

Centrul sferei înscrisă în triedrul cu vârful în C' este $\Omega_2\left(\omega_2,\omega_2,\omega_2\right)$ şi:

$$\mathrm{d}\left(\Omega_2,(XYZ)\right)=a-\omega_2= \text{ raza sferei},$$

adică:

$$\frac{\left|\dfrac{\omega_2}{\alpha}+\dfrac{\omega_2}{\beta}+\dfrac{\omega_2}{\gamma}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}}=a-\omega_2$$

şi:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\omega_2}{\alpha}+\frac{\omega_2}{\beta}+\frac{\omega_2}{\gamma}-1\right)=+1.$$

Rezultă:

$$\omega_2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1=a\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}-\omega_2\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_2=\frac{1+a\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}\Rightarrow$$

$$a-\omega_2=\frac{a\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

$$R_1=R_2\Leftrightarrow\omega_1=a-\omega_2\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}=$$

$$=\frac{a\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{2}{a}.$$

Deci 2) $\leftrightarrow$ 3).

Observaţie. Condiţia din enunţ:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{1}{a},\quad\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}>\frac{1}{a},\quad\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{a},$$

a fost pusă pentru a ne asigura că planul (XYZ) intersectează muchiile $(A'B')$, (BB'), (BC), (CD), (DD') şi $(D'A')$ în punctele M, N, P, Q, R, S situate în interiorul acestor muchii.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Vom arăta că fiecare din primele două afirmaţii este echivalentă cu a treia. Pentru aceasta vom considera un reper cartezian $Oxyz$ care are originea O în punctul A şi pentru care semiaxele pozitive Ox, Oy, Oz sunt respectiv,semidreptele $(AB$, $(AD$ şi $(AA'$. În acest reper vârfurile cubului au cordonatele $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $D(0,a,0)$, $A'(0,0,a)$, $B'(a,0,a)$, $C'(a,a,a)$ şi $D'(0,a,a)$; iar punctele X, Y, Z au coordonatele $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, respectiv $(0,0,\gamma)$, deci ecuaţia planului (XYZ) este $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$.

1)$\Leftrightarrow$3). Punctul M reprezintă intersecţia planului (XYZ) cu dreapta $A'B'$, caracterizată de ecuaţiile $y=0$ şi $z=a$, deci $M\left(\alpha\left(1-\frac{a}{\gamma}\right),0,a\right)$. Remarcăm că M aparţine segmentului $(A'B')$ datorită condiţiilor din enunţ $\gamma>a$ şi $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{a}$.

Similar obţinem:

$$N\left(a,0,\gamma\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)\right),\ P\left(a,\beta\left(1-\frac{a}{\alpha}\right),0\right),\ Q\left(\alpha\left(1-\frac{a}{\beta}\right),a,0\right),$$

$$R\left(0,a,\gamma\left(1-\frac{a}{\beta}\right)\right)\text{ şi }S\left(0,\beta\left(1-\frac{a}{\gamma}\right),a\right).$$

Rezultă că un punct oarecare al dreptei MQ are coordonate de forma:
$$\left((1-u)\alpha\left(1-\frac{a}{\gamma}\right)+u\alpha\left(1-\frac{a}{\beta}\right), ua, (1-u)a\right),$$
pentru un anumit $u \in \mathbb{R}$. Analog, punctele dreptelor NR şi PS au coordonate de forma:
$$\left((1-v)a, va, (1-v)\gamma\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)+v\gamma\left(1-\frac{a}{\beta}\right)\right),$$
respectiv:
$$\left((1-w)a, (1-w)\beta\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)+w\beta\left(1-\frac{a}{\gamma}\right), wa\right),$$
pentru anumiţi $v, w \in \mathbb{R}$.

Să presupunem că dreptele MQ, NR şi PS sunt concurente: aceasta revine la existenţa unor numere reale u, v şi w pentru care coordonatele celor trei puncte generice de mai sus sunt respectiv egale. Aceasta conduce în primul rând la egalităţile $(1-v)a = (1-w)a$, $ua = va$ şi $(1-u)a = va$, care obligă la $u = v = w = \frac{1}{2}$. Egalând atunci abscisele primelor două puncte obţinem:
$$\frac{1}{2}\alpha\left(2-\frac{a}{\gamma}-\frac{a}{\beta}\right)=\frac{1}{2}a \Rightarrow \frac{a}{\alpha}+\frac{a}{\beta}+\frac{a}{\gamma}=2,$$
adică egalitatea de la punctul 3).

Reciproc, dacă această egalitate are loc, se verifică fără probleme că punctul $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ aparţine tuturor celor trei drepte (coordonatele sale se obţin luând pe fiecare dintre u, v, w egal cu $\frac{1}{2}$ şi folosind egalitatea menţionată). Se vede din cele de mai sus că, dacă dreptele MQ, NR şi PS sunt concurente, atunci ele neapărat se intersectează în centrul cubului.

Să ne ocupăm acum de echivalenţa afirmaţiilor 2) şi 3). Sferele despre care este vorba la punctul 2) sunt, de fapt, sferele înscrise în tetraedrele $AXYZ$ şi $C'X'Y'Z'$, unde punctele X', Y', Z' reprezintă intersecţiile planului (XYZ) cu dreptele $C'D'$, $C'B'$, respectiv CC'.

Un calcul simplu arată că raza r a sferei înscrise în tetradrul (tridreptunghic) $AXYZ$ este:
$$r=\frac{3V}{S}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2}}$$
($V = \frac{\alpha\beta\gamma}{6}$ şi $S = \frac{\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2}\right)}{2}$ reprezintă volumul şi aria totală pentru acest tetraeddru). Desigur, r', raza sferei înscrise în $C'X'Y'Z'$, va fi dată de aceeaşi formulă în care α, β, γ se înlocuiesc cu $\alpha' = C'X'$, $\beta' = C'Y'$, respectiv $\gamma' = C'Z'$.

Punctul X', de exemplu, are coordonatele $\left(\alpha\left(1-\frac{a}{\beta}-\frac{a}{\gamma}\right), a, a\right)$ (care se obţin luând în considerare că X' aparţine planului (XYZ) şi dreptei $C'D'$). Atunci se calculează imediat:
$$\alpha' = a-\alpha\left(1-\frac{a}{\beta}-\frac{a}{\gamma}\right)=k\alpha,$$
unde:
$$k=\frac{a}{\alpha}+\frac{a}{\beta}+\frac{a}{\gamma}-1.$$

Analog calculăm $\beta' = k\beta$ şi $\gamma' = k\gamma$; aplicând formula de mai sus pentru r' găsim atunci că $r' = k\gamma$.

Astfel vedem că:

$$r' = r \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\beta} + \frac{a}{\gamma} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{a}$$

şi soluţia problemei se încheie aici.

ISTORIA MATEMATICII

După o sută de ani, la Valea Călugărească

(Societatea „Gazeta Matematică“ la centenar)

MIRCEA TRIFU[1)]

Acum o sută de ani la Valea Călugărească. S-au petrecut, iată, o sută de ani de când a avut loc, la via lui *Ion Ionescu* de la Valea Călugărească[2)] şedinţa redactorilor Gazetei Matematice. La capătul acelei memorabile zile de 31 august 1909 s-a luat hotărârea definitivă de constituire a Societăţii „Gazeta Matematică“, precursoarea de drept a Societăţii de Ştiinţe Matematice de azi. Pe pagina a doua a copertei numărului 1, anul XV al *Gazetei*, număr apărut la 15 septembrie 1909 a fost publicată următoarea notă lămuritoare: *„Cu începere de la 1 septembrie 1909 Redacţia Gazetei Matematice a fost transformată în Societate, pentru îndeplinirea unor forme legale. Principiile care ne-au călăuzit 14 ani în publicarea revistei rămân însă aceleaşi şi pe viitor.“*

Din cei 21 de membri ai societăţii nou înfiinţate, 12 erau ingineri şi 9 profesori. Menţionăm aici inginerii: *Tancred Constantinescu*, *Vasile Cristescu*, *Andrei Ioachimescu*, *Ion Ionescu*, *Mihail Roco* (fondatori ai Gazetei Matematice) şi profesorii următori: *Nicolae Abramescu*, *Anton Davidoglu*, *Traian Lalescu*, *Dimitrie Pompeiu*, *Gheorghe Ţiţeica*.

Argumente pentru înfiinţarea Societăţii. Motivaţiile care au stat la baza înfiinţării *Societăţii* au fost mai multe, legate, de exemplu, de soluţionarea unor posibile conflicte cu persoane din afara Redacţiei, de punerea la adăpost a puţinului capital strâns pentru tipărirea revistei faţă de orice fel de împrejurări nedorite sau de creştere a credibilităţii în faţa unor persoane dispuse să facă donaţii şi cărora organizarea „patriarhală“ nu le inspira suficientă încredere.

A existat însă şi un incident de altă natură, care poate fi ataşat la motivaţiile de mai sus. În anul 1904 salariile funcţionarilor publici s-au redus drastic, cotizaţiile la *Gazetă* se încasau greu. Unul dintre redactori – profesor de matematică, nu i s-a păstrat numele – a propus – nici mai mult – nici mai puţin – desfiinţarea revistei şi împărţirea capitalului strâns, ba chiar şi a cărţilor din bibliotecă.

A fost pusă în circulaţie o *Declaraţie*, care, semnată de o parte dintre redactori, a fost transmisă lui *Ion Ionescu*, pe atunci casier, însărcinat şi cu administrarea revistei. Acesta, consfătuindu-se cu *A. Ioachimescu*, *A. Davidoglu* şi *Gh. Ţiţeica*, care nu semnaseră *Declaraţia*, a convocat adunarea redactorilor la *Societatea Politehnică*, unde declaraţiei de desfiinţare i-au opus declaraţia celor patru, de continuare. *Ion Ionescu*, în calitate de casier, avea răspunderea faţă de abonaţi de a le transmite revista până la sârşitul anului şi nu putea umbla la capitalul existent până la acea dată. Pe de altă parte, o lichidare în părţi egale nu era echitabilă, redactorii neavând aceeaşi vechime la *Gazetă*. Redactorul *Caton Erbiceanu* a mărturisit că semnătura i-a fost luată cu rea credinţă, cel care i-a cerut-o asigurându-l că toţi membrii redacţiei sunt de acord cu lichidarea. Redactorul *Tancred*

[1)]Profesor, Secretar general, S.S.M.R

[2)]Via lui *Ion Ionescu* este, probabil, o moştenire de familie, de la mama sa, *Maria-Atina Ionescu*, născută *Diamandescu*, fiica unui podgorean de la Valea Călugărească. Via a fost vândută în 1938, când *Ion Ionescu* a cumpărat casa din strada Răsuri din Bucureşti.(N.A.)

Constantinescu a confirmat, revoltat, că şi el a păţit acelaşi lucru. Pentru a se reveni la condiţii normale de lucru, la 10 iulie 1904, a fost redactată o *Circulară*, în care se arăta, printre altele, că „... *este natural că nimeni nu este dator să facă un sacrificiu pentru care nu are tragere de inimă, dar nu nici nu trebuie ca acesta să formeze o piedică pentru cei care vor să meargă înainte. Gazeta trebuie să-şi continue apariţiunea în acelaşi mod ca şi până acum*". Cum nu toţi redactorii au trimis răspuns, la 20 august este dată o a doua circulară, cu ton aproape ultimativ: „... *În cazul în care nu vom primi răspuns până la 7 septemvrie a.c. vă vom considera retras din Comitetul de Redacţie al Gazetei.*"

Unele răspunsuri s-au păstrat: „... *Chiar dacă s-ar dizolva actuala funcţiune pentru publicarea Gazetei Matematice, voi face tot ce mi-ar sta în putinţă ca, fără nici o întârziere să se închgebeze o alta*" (*Ion Ionescu*); „*Vă rog să mă consideraţi redactor al Gazetei Matematice atâta vreme cât voi fi profesor de matematică*" (*Vasile Teodoreanu*).

Gazeta Matematică a continuat să apară ...

Înfiinţarea unei societăţi nu este o treabă uşoară. Pentru obţinerea recunoaşterii legale a Societăţii, la şedinţa de la Valea Călugărească a fost desemnată o comisie, frmată din *V. Cristescu*, *A. Ioachimescu*, *I. Ionescu*, *T. Lalescu*, *I. D. Teodor* şi *G. Ţiţeica*, pentru elaborarea statutelor. Forma definitivă a acestora conţine 31 de articole, grupate în 12 Titluri, ca de exemplu: **Art. 2.** *Scopul Societăţii este răspândirea gustului pentru studiul ştiinţelor matematice şi îndrumarea cercetări originale relative la această ramură de ştiinţă*; **Art. 7.** *Nu există decât o categorie de membri: membri activi.*

După definitivarea statutelor, pentru recunoaşterea *Societăţii* ca persoană morală (juridică) a fost alcătuit următorul proiect de lege:

Art. Unic. *Se recunoaşte Societăţii Gazeta Matematică din Bucureşti calitatea de persoană morală în baza statutelor aci alăturate şi care nu se pot modifica decât cu autorizaţiunea Consiliuui de Miniştri.*

Acesta a fost depus, din iniţiativa parlamentară, de către deputatul de Vlaşca, *Nicolae Bălănescu*, în şedinţa Camerei din 27 martie 910, când s-a cerut şi s-a admis urgenţa. Raportor al legii a fost *G. C. Dragu.* Legea a fost votată în Camera deputaţilor la 5 aprilie 1910, cu 61 bile albe şi 3 bile negre.

La Senat legea a trecut în toamna aceluiaş an, la 27 noiembrie, cu 45 bile albe şi o bilă neagră, raportor fiind *G. Cnstantinescu-Romniceanu.*

Regele *Carol I* a promulgat legea prin Decretul 3798 din 16 decembrie 1910, publicat în Monitorul Oficial o săptămână mai târziu.

Luând cuvântul în Senat, în favoarea legii, *Spiru Haret* a arătat că această *Societate* „... *este o fondaţie ... ştiinţifică dezinteresată, care, nu numai că nu are fonduri, dar, din contră , dă din punga ei pentru a susţine Gazeta Matematică. A contribuit mai mult decât orice altă instituţiune pentru dezvoltarea şi întărirea învăţământului matematic.*"

Comentând rezultatul votului din cele două camere legiuitoare, *Ion Ionescu* observa, cu bonomă ironie, că „... *rezultatele sunt foarte surprinzătoare, dacă ne gândim câtă lume este certată cu matematica încă de pe timpul când o învăţau ca şcolari* !"

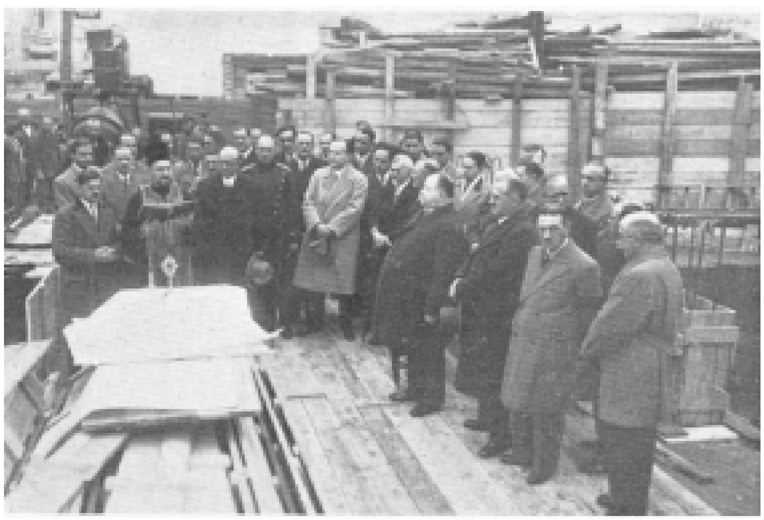
Societatea *Gazeta Matematică* era, potrivit statutelor, administrată de o Delegaţie, compusă din doi membri, aleşi pe o perioad a de doi ani şi fără drept de realegere imediată şi un casier, ales pe perioadă de cinci ani, cu drept de realegere. Ceilalţi membri au primit sarcini pe probleme: delegat pentru aritmetică, delegat pentru geometrie, delegat pentru cercetarea notelor şi articolelor etc. Delegat pentru rapoarte a fost numit *G. Ţiţeica*, o funcţie în care a stat până la sfârşitul vieţii.

Administraţia şi redacţia au rămas, în continuare, în odăiţa din strada Manea Brutaru nr. 14 (azi General C. Budişteanu), acolo unde, la 14 octombrie 1894 cinci ingineri (iniţiatorii): *Victor Balaban*, *Vasile Cristescu*, *Ion Ionescu*, *Mihail Roco* şi *Ioan Zottu*, au propus înfiinţarea unei reviste de matematică „... *de care să profite elevii liceelor noastre*".

Revista s-a numit, de atunci şi până astăzi, *Gazeta Matematică*. La adresa amintită se aflau birourile centrale ale Serviciului pentru Construcţia liniei ferate Feteşti-Cernavodă, de sub conducerea inginerului *Anghel Saligny*, iar cei cinci ingineri, fiecare în vârstă cu puţin peste 25 de ani, erau angajaţi acolo.

După promulgarea *Legii persoanelor juridice*, în februarie 1924, statutul *Societăţii* a fost revizuit. S-au schimbat, printre altele, normele de fixare a cotizaţiei şi a taxelor de admitere în *Societate*, a fost modificat anul financiar(de la an şcolar, cum era până atunci, la an calendaristic). Potrivit noii legi, *Societatea* a fost pusă sub tutela Ministerului Instrucţiunii Cultelor şi Artelor, care a şi aprobat, în anul 1932, noul statut, aprobare „întărită“ ulterior în tribunal.

Calea Griviţei nr. 158: Casa Gazetei Matematice. Încă de prin anul 1920 se preconiza construcţia unui local al *Gazetei Matematice*, redactorul *N. Nicolescu* donând primii 500 de lei în acest scop. În anul 1923, *Traian Lalescu* propune lui *Tancred Constantinescu*, membru fondator al Gazetei, ajuns Director General al Căilor Ferate, să doneze o parcelă dintr-un lot aflat lângă Gara de Nord, pentru construcţia localului. În aprilie anul următor, regele Ferdinand sancţionează următoarea lege: **Articol Unic.** *Se ratifică înaltul decret regal nr. 3714 din 20 iulie 1923, prin care direcţiunea generală C.F.R. Casa Muncii este autorizată a ceda în mod gratuit Societăţii Gazeta Matematică parcela din Calea Griviţei Nr. 158-60 în suprafaţă de 250 mp pentru a-şi construi local, care să servească drept sediu al Societăţii. .... Dat în Bucureşti, la 4 aprilie 1924, Ferdinand.*



De la solemmnitatea punerii pietrei fundmentale a localului ,,Casa Gazeta Matematică", 27 octombrie 1933.

Legea a fost votată de Adunarea deputaţilor la 29 februarie 1924 în unanimitate cu 98 de voturi, iar în Senat, la 10 martie 1924, cu 68 de voturi pentru, contra 9.

La fondurile strânse până atunci se adaugă 1 milion de lei daţi de *Mihail Manoilescu*, subsecretar de stat la Finanţe (participant, ca elev, în patru ani consecutivi, la Concursurile Gazetei Matematice) din fondurile culturale ale ministerului. Suma obţinută, la care se adaugă dobânzile aferente, a fost suficientă pentru a construi parterul şi primul etaj al blocului din Calea Griviţei nr. 158 (azi 144), bloc care se va numi „*Casa Gazeta Matematică*“. Inginerul *Aurel Ioanovici*, membru al *Societăţii*,se oferă să facă lucrarea în cost, adăugând mobilier, lămpi, perdele . „*... Dintre toate problemele propuse în Gazeta Matematică nu a fost niciuna mai grea, mai frumoasă şi mai interesantă, decât problema Casei*

Gazetei Matematice", va remarca *Gh. Ţiţeica* la inaugurare, în ziua de 27 ianuarie 1935. Cu construcţia *Casei* perioada „nomadă" a *Gazetei* şi, implicit, a *Societăţii*, ia sfârşit. Aici se vor ţine de acum toate şedinţele bilunare ale redacţiei, aici se vor strânge plicurile cu articole şi probleme.

Marele Jubileu din anul 1935. Semicentenarul Gazetei Matematice. Anul 1935 este anul primului mare jubileu al Gazetei Matematice: 40 de ani de la apariţia primului număr. Apare volumul omagial *Gazeta Matematică – 1895 – 1935. Istoric, Învăţăminte*, în care redactorii: *Gh. Ţiţeica*, *Ion Ionescu*, *Andrei Ioachimescu*, *Cristea Mateescu*, *Gheorghe Buicliu*, *Ovidiu Ţino*, *Grigore Zapan* fac o amplă şi exactă radiografie a „fenomenului Gazeta Matematică", relevând contribuţia revistei la succesul pe care l-a avut reforma lui *Haret*, cu secţia reală a liceului. *Gheorghe Ţiţeica* face prima judecată de valoare asupra *Gazetei*, apreciind că şcoala matemtică românească este produsul mai multor factori: înfiinţarea celor două unversităţi, la Iaşi (1860) şi la Bucureşti (1864), apariţia primilor doctori în matemaatică cu teze susţinute la Sorbona (*Spiru Haret*, *Constantin Gogu*, *David Emmanuel* şi apariţia celor două reviste, *Recreaţii ştiinţifice* la Iaşi şi *Gazeta Matematică* la Bucureşti. La şedinţa festivă, ţinută în marele amfiteatru al Politehnicii, a luat parte şi regele *Carol al* II-*lea*, care a făcut urarea ca „*. . . cei 40 de ani împliniţi . . . să se împlinească încă de 40 de ori*!"

În anul 1945, într-o ţară pustiită de război, în condiţii austere, este sărbătorit semicentenarul Gazetei Matematice. Este publicat volumul „*Gazeta Matematică* (*Decada a 5-a*). *Istoric - Învăţăminte*", se bat 502 medalii de argint şi bronz, se emit 400 000 de serii de mărci poştale dedicate evenimentului. Cu prilejul Jubileului *Gazetei*, a început la Bucureşti şi s-a sfârşit la Cluj, cel de al 3-lea Congres al Matematicienilor Români, la care au participat 220 de persoane din 30 de oraşe ale ţării. O delegaţie a participanţilor la Congres este primită la *Casa Gazetei Matematice* din Calea Griviţei, unde li se oferă chiar o gustare. *Ion Ionescu*, grav bolnav, în imposibilitate de a participa la festivităţi, primeşte acasă, în strada Răsuri, o delegaţie a *Societăţii*, care îi înmânează medalia jubiliară. . . . În incinta Institutului de Statistică a fost deschisă *Expoziţia Cărţii Româneşti de Matematică.* Pe mesele şi pe rafturile Expoziţiei se puteau vedea cele 50 de volume ale Gazetei, dar şi *Aritmetica lui Şincai* sau *Calculul diferenţial al lui Culianu*, colecţia completă a tezelor de doctorat susţinute de matematicienii români, cărţi de autori români tipărite în străinătate, cărţi de şcoală, extrase din reviste străine.

Într-un raport asupra mersului *Societăţii* pe anul 1945, prezentat în Adunarea generală din 25 februarie 1946, aflăm despre dificultăţile financiare aferente devalorizării monedei naţionale, despre costurile ridicate de tipărire a revistei, dar şi de sprijinul material acordat *Societăţii* de către autorităţi, unităţi şcolare, persoane fizice, membri ai *Societăţii.* Astfel, sunt menţionaţi că au donat 5000 lei *N. Abramescu*, *Valeriu Alaci*, *N. N. Mihăileanu* şi *A. Popescu-Zorica.* Un grup de elevi din Turnu-Severin au donat 87000 petru tipărirea revistei. În acelaşi scop, donează Liceul din Râmnicu-Sărat suma de 70000 lei, Ministerul Educaţiei Naţionale (ministru *Ştefan Voitec*) suma de 1000000 lei, Gimnaziul Oituz din Tg. Ocna, suma de 20000 lei.

Se sfârşeşte o lume, se naşte o lume. Anul 1949 avea să fie un an de mari frământări pentru *Societatea Gazeta Matematică.* La 15 mai, cu punctualitatea deja cunoscută, a apărut numărul 9 al revistei Celelalte numere, 10, 11, 12 deşi au fost plătite, n-au mai apărut niciodată. Nu s-a dat nicio explicaţie în legătură cu acest fapt, nemaiîntâlnit până atunci. Mai mult, a început evacuarea localului din Calea Griviţei, mai mulţi trecători ocazionali putând observa cum pachetele cu cărţi din biblioteca *Societăţii* (peste 3400 de titluri) erau aruncate de la etajul întâi diret într-un camion ce staţiona în faţa localului. *Constantin Ionescu-Ţiu*, custodele bibliotecii şi administratorul localului, a fost nevoit să-şi caute o altă locuinţă, iar *Grigore Zapan*, casierul Societăţii, a fost obligat să retragă de la Imprimeria Naţională , în stadiul în care se aflau, toate lucrările care urmau să apară.

Cărţile din bibliotecă s-au împrăştiat ca fumul, nu se ştie unde, *Casa Gazetei Matematice* a fost preluată de I.A.L. fără temei legal şi înţesată de chiriaşi (aşa a rămas până astăzi, cu deosebirea că statul a permis chiriaşilor să cumpere apartamentele în care stăteau!).

Se petreceau lucruri teribile în toată societatea românească, evenimentele se derulau în secret, se instaura încet-încet atmosfera de suspiciune, de teamă. Au loc procese politice în care sunt „demascaţi“ duşmanii poporului sau cei care s-au făcut vinovaţi de dezastrul ţării, de crime de război şi de înaltă trădare, prin antrenarea României în război alături de Germania hitleristă. Un val nemaivăzut de arestări loveşte grav Academia Română, Biserica, Armata, iar „noua politică“, cu vremea, se va întinde peste tot. Membri marcanţi ai *Socităţii Gazeta Matematică* care au fost, într-un fel sau altul, implicaţi în politică, sunt arestaţi şi dispar în închisori.

Inginerul *Tancred Constantinescu*, absolvent – şef de promoţie (1895) al Şcolii Naţionale de Poduri şi Şosele, singurul în viaţă dintre cei zece fondatori ai *Gazetei Matematice* (el a donat în anul 1927 din partea C.F.R., terenul pe care s-a construit Casa Gazeta Matematică) a fost senator liberal şi ministru al Industriei şi Comerţului în guvernul *Brătianu* în perioada 1923-1926. Este arestat în noaptea de 5/6 mai 1950 , numită mai târziu – „noaptea demnitarilor“ – şi moare în închisoarea de la Sighet la 14 mai 1951.

Inginerul *Mihail Manoilescu*, absolvent – şef de promoţie (1915) al Şcolii Naţionale de Poduri şi Şosele, membru al *Societăţii* din anul 1926 (a participat, ca elev, la patru ediţii ale Concursului *Gazetei Matematice*), în perioada când a fost subsecretar de stat la Finanţe (1926-1929) a donat, din fondurile culturale, suma de 1000000 lei pentru construcţia *Casei Gazeta Matematică*. Creator de doctrină economică – cartea sa „Teoria protecţionismului şi a schimbului internaţional“ din 1929 este, după *C. Murgescu*, *„. . . o primă străpungere românească în gândirea economică universală“*. A fost ministru al Lucrărilor publice şi Comunicaţiilor în guvernul *Maniu* (1930), Guvernator al Băncii Naţionale (1931), ministru al Afacerilor Străine în guvernul *Gigurtu* (1940), când va semna, ca împuternicit al statului român, nedreptul Dictat de la Viena. Este arestat în anul 1944 şi reţinut, fără proces un an de zile. În anul 1948 este arestat din nou şi internat la Jilava, Ocnele Mari şi Sighet, unde moare în anul 1950. Apoi – caz, probabil unic în analele justiţiei din ţările civilizate – este judecat în absenţă (!) la 12 aprilie 1952 pentru articole profasciste şi condamnat la 15 ani închisoare şi confiscarea totală a averii. Familiei i se va comunica moartea sa abia în 1958 !

Profesorul universitar *Constantin Buşilă*, membru al *Societăţii* încă din anul 1910, absolvent – şef de promoţie (1910) al Şcolii Naţionale de Poduri şi Şosele, mare energetician, a ajuns prorector al Politehnicii şi decan al Facultăţii de Electromecanică. În perioada 1941-1943 a fost ministru al Lucrărilor publice şi Comunicaţiilor în guvernul *Antonescu*. În anul 1946 Tribunalul Poporului îl condamnă la 10 ani închisoare. Moare în penitenciarul din Aiud la 3 februarie 1950.

Generalul de divizie *Gheorghe Potopeanu*, membru al *Societăţii Gazeta Matematică* din anul 1930, a fost ministru al Economiei Naţionale (1941), guvernator al Transnistriei (din 26 ianuarie 1944), ministru de finanţe în guvernul *Sănătescu* (23 august 1944-13 octombrie 1944). A fost arestat în octombrie 1944 şi reţinut trei luni de zile fără proces. În anul 1948 este rearestat şi condamnat la 5 ani de închisoare pentru crime împotriva păcii, la Jilava şi Aiud. După ispăşirea pedepsei este arestat din nou în 1957, condamnat la 10 ani de închisoare pentru spionaj şi înaltă trădare şi încarcerat la Jilava, Piteşti şi Dej. Este eliberat prin graţiere în 1966. Moare în acelaşi an.

Familiile şi-au plâns în tăcere morţii, îngropaţi, uneori în morminte neştiute, fără cruci.

Şi apoi s-a lăsat, cu nedreptate şi vinovăţie, uitarea ....

Viaţa mergea înainte.

În Gazeta Învăţământului din 15 iulie 1949 s-a putut citi că: „... *s-a produs, de curând, un eveniment care va avea efecte de mare însemnătate în ridicarea nivelului ştiinţific din ţară. Este vorba de înfiinţarea Societăţii Ştiinţelor Matematice şi Fizice din R.P.R.*“. Fără alte amănunte. În luna august a aceluiaş an a apărut *Gazeta Matematică şi Fizică – revistă pentru studiul şi răspândirea ştiinţelor matematice şi fizice, Anul I (vol. 55), Serie nouă a Gazetei Matematice fondată în 1895, nr. 1, iunie 1949.* Era clar de ce nu mai apăruseră numerele din iunie-iulie-august ale vechii *Gazete Matematice* !

În acest prim număr al noii reviste, în articolul „Cuvânt înainte“, după o facilă şi laconică apreciere pozitivă la adresa *Gazetei Matematice*, autorul, ascuns în umbra anonimatului (articolul este semnat de ... secretariatul de redacţie al *Gazetei Matematice şi Fizice*) arată că „... *Gazeta Matematică, ca şi revistele facultăţilor de ştiinţe, au prezentat încă de la început o serie de lipsuri fundamentale, moşteniri ale regimului moşieresc din trecut .... Izolarea îndelungată, forţată a ştiinţei româneşti de ştiinţa sovietică, cea mai înaintată din lume, a ridicat obstacole esenţiale în calea creaţiei ştiinţifice ... Gazeta Matematică a acordat problemei învăţământului o atenţie cu totul redusă ... În total, Gazeta Matematică nu mai corespunde democraţiei populare din R. P. R. în drum spre socialism. După cum nu corespund nici formele organizatorice ale fostelor societăţi de matematică şi fizică. În consecinţă, în iunie 1949 a fost formată Societatea Ştiinţelor Matematice şi Fizice din R. P. R. Totodată, Gazeta Matematică se transformă în Gazeta Matematică şi Fizică, devenind organ al Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.*“

Articolul-program continuă cu definirea scopului *Gazetei*, ca organ al noii *Societăţi* şi se încheie cu îndemnul mobilizator: „*Înainte, dar, la muncă luminată, pentru o ştiinţă în slujba poporului*!“

Defăimarea fără noimă a vechii *Gazete Matematice* ar fi meritat o ripostă pe măsură. Dar cine avea curajul să o facă, în iureşul „revoluţionar“ al acelor ani ?

Pe ultimele pagini ale primului număr al *Gazetei Matematice şi Fizice* este publicată componenţa nominală a Consiliului Central Provizoriu şi al Biroului *Societăţii Ştiinţelor Matematice şi Fizice* în R.P.R., stabilite la şedinţa de constituire din 30 mai 1949.

Din cei 39 de membri ai Consiliului, 16 au fost membri ai *Societăţii Gazeta Matematică*, ceilalţi provenid de la secţiile de matematică şi de fizică ale Societăţii Române de Ştiinţe, defiinţată în primăvara lui 1949 de către Prezidiul Academiei R. P. R.

Nu a existat un decret al Marii Adunări Naţionale, noul organ legisltiv al ţării, care să abroge Decretul Regal 3798 din 1910, de aceea concluzionăm că, în anul 1949 *Societatea Gazeta Matematică* s-a transformat în *Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R. P. R.*, la aceasta afiliindu-se şi secţiile de matematică şi de fizică ale Societăţii Române de Ştiinţe.

Actul constitutiv al noii societăţi, însoţit de lista participanţilor la şedinţa din 30 mai 1949, este înaintat Tribunalului Ilfov, Secţia a III-a, pentru legiferare şi pentru dobândirea personalităţii juridice. Aceasta este acordată, începând cu data de 3 decembrie 1949, sub controlul Ministerului Învăţământului şi al Ministerului de Interne. Cu acelaşi prilej, Tribunalul Ilfov, Secţia Notariat, certifică cu nr 12497/1949, Statutul S.S.M.F din R.P.R. aprobat la adunarea generală din 30 mai 1949.

În mod normal, o astfel de transformare ar fi presupus preluarea de către noua societate (S.S.M.F) a activului şi pasivului vechii societăţi şi a portofoliului de lucrări (articole, note, probleme propuse etc.). Nimic din toate acestea nu s-a petrecut. *Grigore Zapan*, casierul *Societăţii Gazeta Matematică*, a fost nevoit să facă rost de sumele necesare achitării datoriilor faţă de tipografie. Corespondenţii care au primit confirmarea reţinerii materialelor trimise, au aşteptat în zadar, publicarea acestor. Rezolvitorii de probleme au aşteptat degeba să afle rezultatele strădaniilor lor. Noua societate nu a mai folosit vechiul sediu din Calea Griviţei – acesta căpătase, deja, altă destinaţie – ci a peregrinat, în calitate de chiriaş, pe la diferite adrese: la 1 iulie 1949, str. Episcopiei nr. 2, etaj 5, de la 1 ianuarie 1950, Bd. 6 Martie nr. 63, de la 8 iulie 1952, str. Dionisie Lupu nr. 40, de la 1 iunie 1954, str. Spiru Haret nr. 12, de la 1 februarie 1955 şi până în prezent, str. Academiei nr. 14.

A fost neglijat tot ce amintea de trecut, se voia ca totul să înceapă de la zero, pe baze noi.

S-a trecut cu vederea, chiar în actele constitutive, că S.S.M.F. reprezintă o continuare firească a *Societăţii Gazeta Matematică*, de aceea nu s-a făcut referire la baza materială de care dispune aceasta din urmă.

A fost reţinută numai vechimea, de peste jumătate de secol, a *Gazetei Matematice*.

Renunţarea „la trecut" – sau, la o parte din el – s-a prelungit şi mai târziu. Astfel, în lucrarea „Societăţi şi Asociaţii în ştiinţa românească" editată de Asociaţia Oamenilor de Ştiinţă din R. S. România, Bucureşti, 1981, se arată că „*. . . în 1949, secţiile de matematică şi fizică ale Societăţii de Ştiinţe din România s-au constituit în Societatea de Şiinţe Matematice şi Fizice, care s-a scindat în 1964 în două secţii (Ord.M.I. nr. 577 din 29 VI 1964), lărgindu-şii cadrul de activitate prin atragerea unui număr mai mare de profesori din învăţământul gimnazial şi liceal*". Nicio vorbă despre *Societatea Gazeta Matematică*!

Abia la Conferinţa Naţională a S.S.M. din 1995, în preambului Statutului S.S.M. adoptat atunci, se prevedea că: „*. . . Societatea de Ştiinţe Matematice sub diferitele denumiri purtate de-a lungul anilor (Societatea Gazeta Matematică, Societatea de Şiinţe Matematice şi Fizice, Societatea de Şiinţe Matematice) a fiinţat în temeiul statutului Societăţii Gazeta Matematică din 1910, cu modificările aduse în 1932, al statutului Societăţii de Şiinţe Matematice şi Fizice, adoptat în anul 1949 şi al statutului Societăţii de Şiinţe Matematice, adoptat în anul 1964, cu modificările aduse în 1975.*"

Cinci ani mai târziu, în şedinţa publică din 3 octombrie 2000, Judecătoria Sectorului 1 Bucureşti „*. . . în numele legii, hotărăşte: Admite cererea formulată de petenta, Societatea de Ştiinţe Matematice din România, cu sediul în Bucureşti, str. Academiei nr. 14, Sector 1. . . . Constatăm că petenta . . . este succesoarea în drepturi a Societăţii de Matematică şi Fizică din R.P.R., care a succedat , la rândul său. Societăţii Gazeta Matematică*".

Acum, la început de mileniu, *Societatea* privea spre viitor . . . cu întreg trecutul!

La Valea Călugărească, după o sută de ani. S-a întâmplat ca 25 septembrie 2009 să fie o frumoasă zi de toamnă când, Biroul S.S.M.R. a convocat la Valea Călugărească reprezentanţii filialelor *Societăţii*, într-o şedinţă aniversară, pentru a marca începutul manifestărilor dedicate Centenarului *Societăţii Gazeta Matematică*. Au participat şi numeroşi invitaţi. Au luat cuvântul, pentru scurte alocuţiuni aniversare, acad. *Marius Iosifescu*, vicepreşedinte al Academiei Române, prof. univ. *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române, preşedinte de onoare al S.S.M.R., conf. univ. dr. *Augustin Mitu*, secretar de stat in Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării, ing. *Mircea Cosma*, preşedintele Consiliului judeţean Prahova, prof. *Nicolae Angelescu*, preşedintele Filialei Prahova a S.S.M.R şi inspector general la I.Ş.J. Prahova, organizatorul *de facto* al întâlnirii, prof. univ. dr. *Nicolae Victor Zamfir*, preşedintele Societăţii Române de Fizică, prof. univ. dr. *Doru Ştefănescu*, primvicepreşedinte al S.S.M.R., conf. univ. dr. ing. *Alexandru Popa* de la Universitatea de Petrol şi Gaze din Ploieşti (care a evocat personalitatea lui *Ion Ionescu*), prof. *Mircea Trifu*, secretar general al S.S.M.R. Sarcina de moderator a fost susţinută de prof. univ. dr. *Radu Gologan*, preşedintele S.S.M.R. Au mai prezentat cuvântări personale şi alocuţiuni prof. *Al. Popescu-Zorica*, decanul de vârstă al S.S.M.R., fost membru al vechii *Societăţi Gazeta Matematică*, prof. univ. dr. *Miron Oprea* şi prof. *Olimpia Popescu*.

Mesajul Societăţii Române de Fizică
adresat
Societăţii de Ştiinţe Matematice din România
cu prilejul aniversării a 100 de ani de la înfiinţare

Dragi colegi,

Membrii Societăţii Române de Fizică transmit un mesaj călduros de felicitare colegilor lor matematicieni cu ocazia aniversării a 100 de ani de la înfiinţarea Societăţii de Ştiinţe Matematice.

Au trecut o sută de ani de la crearea unei societăţi de referinţă şi tot o sută de ani în care matematicienii români au demonstrat că entuziasmul şi seriozitatea pot pune bazele unei societăţi puternice care, trecând peste vicisitudinile istoriei, a reuşit crearea unei şcoli puternice de matematică recunoscută în întreaga lume.

În acest moment aniversar, fizicienii şi matematicienii români celebrează şi cinstesc momente şi personalităţi ale istoriei comune: înfiinţarea, în 1897, a *Societăţii de Ştiinţe din Bucureşti, prin fuzionarea Societăţii de Ştiinţe Fizice cu Societatea Amicii Ştiinţelor Matematice*; crearea, în 1949, a *Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din România*, prin unificarea Societăţii Române de Ştiinţe cu Societatea Gazeta Matematica, avându-l ca Preşedinte pe Acad. Gr. C. Moisil.

Crearea, în 1990, *a trei societăţi separate* pentru matematică, fizică şi chimie a reprezentat o despărţire formală, unitatea scopului şi a voinţei acestora fiind evidentă.

Deziderate comune precum contribuirea la *răspândirea cunoştiinţelor ştiinţelor exacte, sprijin în pregătirea ştiinţifică a membrilor, stimularea activităţii de cercetare ştiinţifică şi didactică a profesorilor din învăţământul de toate gradele, cultivarea în rândurile tineretului a interesului şi pasiunii pentru ştiinţele exacte, participarea la dezbaterea stării generale a învăţământului românesc* întăresc ideea comuniunii ştiinţelor exacte şi a membrilor celor trei societăţii şi constituie liante în eforturile comune de susţinere şi dezvoltare a ştiinţei româneşti.

Dragi colegi, vă urăm din inimă o viaţă lungă plină de împliniri!

Societatea Română de Fizică
Preşedinte
Prof. Dr. Nicolae Victor Zamfir

Din intervenţiile participanţilor la dezbatere s-au conturat câteva măsuri şi activităţi concrete pentru anul 2010: şedinţă aniversară în Aula Academiei Române, orgnizarea, în România, a şedinţei anuale a Comitetului Societăţii Europene de Matematică (EMS), dezvelirea unui bust al lui *Ion Ionescu* la Valea Călugărească şi a unei plăci comemorative pe casa din strada General Budişteanu nr. 14-16 din Bucureşti, o expoziţie de carte românească de matematică, manifestări aniversare la nivelul tuturor filialelor *Societăţii*.

La banchetul organizat la Valea Călugărească, cu acest prilej, gazdele au oferit, după „pohta" matematicienilor „*un dram din gustul bucatelor munteneşti, din locul slobozirii*

Societăţii de Matematică acum un veac". Lista-meniu, alcătuită după modelul din 1909, şi, evident. „actualizată" în conţinut, a fost oferită fiecărui participant, ca aducere aminte. Facem câteva „citări":

„*Ţuică de Văleni – cu limpezimea unei axiome şi tăria oricărui început de teorie matematică, gustălău* (gustare) – *condiţie necesară potrivit raţionamentului matematic, caş de cap* (tobă), *lebăr, şorici, răcituri* (aspic), *castravete cu urdă şi mărar, ceapă de apă, bitoc* (chifteluţe speciale), *roşii umplute cu vinete*". După cafea, s-a continuat cu „*. . . sărmăluţe* (*integrate în cuib de foaie de varză şi derivate din foaie de viţă*), *mămăligă vârtoasă* (*ca o demonstraţie riguroasă*) *ciuşcă of groscior* (smântână) *pentru redactarea finală şi cu un produs direct şi tensorial* (după caz) *de cârnăciori la jar*: *ceafă de purcel, piept de pui otăncit, cârnčiori călugăreşti*, toate acestea stropite cu *vin de Valea Călugărească cu gust de celebră teoremă*". Desertul a constat dintr-o „*. . . delicioasă plăcintă cu mere* (*ca bucuria unui articol acceptat de Gazeta Matematică*)".

Motiv ca discuţiile să se prelungească (chiar dacă nu prin continuitate), până târziu.

Desfăşurată într-o atmosferă de înţelegere şi bună dispoziţie, întâlnirea de la Valea Călugărească a fost bine apreciată de participanţi.

Aspecte din istoria O.I.M.

CONSTANTIN RUSU[1)] şi NECULAI STANCIU[2)]

La al IV-lea *Congres al Matematicienilor Români* în anul 1956, se propune organizarea unei *olimpiade internaţionale de matematică*.

În anul 1959, România organizează prima *Olimpiadă Internaţională de Matematică* (OIM) – competiţie anuală de matematică la care participă elevi din diferite ţări (atunci au fost prezente 7 ţări).

Matematica este domeniul în care tinerii români s-au remarcat constant pe plan internaţional. De la lansarea OIM, în 1959, singurul participant care a reuşit o lucrare perfectă(realizarea punctajului maxim – 42 puncte) la fiecare dintre cele trei ediţii (1995, 1996, 1997) la care a luat parte este un român, *Ciprian Manolescu*. *Ciprian Manolescu* este absolvent *summa cum laudae* în matematică la Harvard, iar în 2004 şi-a încheiat doctoratul la aceeaşi universitate. Acum este Associate Professor la renumita universitate americană UCLA.

Câte trei medalii de aur, chiar dacă nu adjudecate cu scor maxim, le-au revenit, de-a lungul timpului, altor trei liceeni români: *Mihai Manea* (1999, 2000, 2001), *Ştefan Laurenţiu Horneţ* (1997, 1998, 1999) şi *Teodor Bănică* (1989, 1990, 1991).

Alţi români care au obţinut punctaje maxime sunt: *Daniel Tătaru* (1984, 1985), *Adrian Vasiu* (1987, 1988), *Nicuşor Dan* (1987, 1988), *Andrei Moroianu* (1987, 1989), *Mugurel Barcău* (1987), *Liviu Suciu* (1987), *Sergiu Moroianu* (1991), *Dragoş Nicolae Oprea* (1995) şi *Ovidiu Savin* (1995).

În afară de cei menţionaţi mai sus medalii de aur au mai obţinut: *Dan Voiculescu* (1966, 1967), *Ana Caraiani* (2002, 2003), *Adrian Ioan Zahariuc* (2005, 2006), *Adrian Bogdan Ungureanu* (2005, 2006), *Victor Nistor* (1978, 1979), *Constantin Chişcanu* (1995, 1996), *Geffry Barad* (1992, 1993), *Andrei Neguţ* (2004), *Florin Belgun* (1990), *Radu Horia Mihăescu* (1998), *Andrei Dan Ionescu* (1991), *Louis Funar* (1984), *Marius Beceanu* (1999), *Adrian Ocneanu* (1974), *Şerban Nacu* (1992), *Dragoş Ioan Michnea* (2005), *Gabriel Kreindler* (2005), *Livia Alexandra Ilie* (2007), *Cezar Gheorghe* (1960), *Adrian Corduneanu* (1996), *Barbu Rudolf Berceanu* (1968), *Mugurel Barcău* (1987), *Radu Negulescu* (1985), *Bogdan Enescu* (1978), *László Zsidó* (1963), *Ştefan Radu Niculescu* (1996), *Virgil Petrea*

[1)]Profesor, Liceul „Ştefan cel Mare", Râmnicu Sărat

[2)]Profesor, Şc. gen. „George Emil Palade" c si Şc. gen. nr. 6, Buzău

(2002), *Basarab Nicolescu* (1959), *Mircea Martin* (1972), *Flaviu Iepure* (1998), *Nicolae Beli* (1986), *Răzvan Gelca* (1985), *Marius Dabija* (1986), *Eduard Gabriel Băzăvan* (2006), *Elena Mădălina Perşu* (2009)şi *Omer Cerrahoglu* (2009).

Doar doi participanţi la OIM au patru medalii de aur: germanul *Christian Reiher* (2000, 2001, 2002, 2003) şi americanul *Reid Barton* (1998, 1999, 2000, 2001).

O altă performanţă, neegalată până acum la OIM, o realizează echipajul american în anul 1994. Toţi cei şase reprezentanţi obţin punctajul maxim. Antrenorul echipei olimpice de matematică a Statelor Unite, la Olimpiada Internaţională de Matematică din 1994, de la Hong Kong, a fost profesorul român *Titu Andreescu*.

În ceea ce priveşte ţara organizatoare a OIM, România ocupă primul loc (1959, 1960, 1969, 1978, 1999).

Cea mai importantă distincţie din lumea matematicii – Medalia Fields (din 1936), este cunoscută ca un fel de Premiu Nobel pentru matematică şi recompensează realizările majore din matematică.

Ea se acordă în cadrul Congresului Internaţional de Matematică (ICM). Tot la acest congres se mai acordă Premiul Nevanlinna (din 1982) şi Premiul Gauss , pentru aplicaţiile practice ale matematicii (din 2006). Începând cu 2010, alături de aceste trei premii se va acorda şi Medalia Cern, pentru realizări în matematică pe parcursul întregii vieţi.

Medalia Fields

Premiul Rolf Nevanlinna

Premiul Carl Friedrich Gauss

Spre deosebire de Premiul Nobel, care se acordă anual, Medalia Fields este atribuită la fiecare 4 ani. De menţionat că medaliaţii Fields trebuie să aibă o vârstă mai mică de 40 de ani. Printre aceştia sunt şi următorii olimpici internaţionali:

Grigori Margulis – medaliat cu argint pentru U.R.S.S. în 1962. A primit Medalia Fields în 1978.

Vladimir Drinfel'd – medaliat cu aur pentru U.R.S.S. în 1969. A primit Medalia Fields în 1990.

Jean-Christof Yoccoz – medaliat cu aur pentru Franţa în 1974. A primit Medalia Fields în 1994.

Richard Borcherds – medaliat cu argint pentru Anglia (UK) în 1977. A primit Medalia Fields în 1998.

Timothy Gowers – medaliat cu aur pentru U.K. în 1981. A primit Medalia Fields în 1998.

Terence Tao – medaliat cu bronz în 1986, cu argint în 1987 şi cu aur în 1988. A primit Medalia Fields în 2006.

La ultimul *Congres Internaţional de Matematică*, organizat în Spania, la Madrid, în 2006, un alt olimpic internaţional, *Grigori Perelman*, a fost invitat să ridice Medalia Fields. Talentat la matematică, urmează cursurile unui prestigios liceu leningrădean renumit pentru specializarea sa în fizică şi matematică. Rezultatele sale nu se lasă aşteptate şi, în 1982, devine membru al lotului sovietic pentru Olimpiada Internaţională de Matematică şi obţine medalia de aur cu scorul maxim posibil: 42 de puncte. A refuzat Medalia Fields(2006) şi premiul de 1.000.000 de dolari oferit de *Clay Mathematics Institute*, pentru rezolvarea *Conjecturii lui Poincaré*, una din cele şapte probleme ale mileniului. La Princeton, unde olimpicul nostru internaţional *Daniel Tătaru* a efectuat studiile postdoctorale, lucrează englezul *Andrew Wiles* (a demonstrat marea teoremă a lui *Fermat* – după 357 de ani de la enunţare) şi a lucrat începînd din 1993 şi rusul *Grigori Perelman*.

Viitorul *Congres Internaţional de Matematică*, cel din 2010, va avea loc în India, în oraşul Hyderabad.

În încheiere, felicităm echipa României participantă la a 50-a ediţie a OIM de l Bremen, Germania (la care au participat un număr record de ţări – 104) pentru rezultatul obţinut.

Aceasta a fost formată din următorii concurenţi:

- *Elena Mădălina Perşu* (vârsta – 18 ani) – argint 2007, argint 2008, aur 2009;
- *Andrei Deneanu* (vârsta – 19 ani) – argint 2009;
- *Francisc Bozdan* (vârsta – 19 ani) – argint 2009;
- *Tudor Pădurariu* (vârsta – 17 ani) – bronz 2009;
- *Marius Tiba* (vârsta – 16 ani) – bronz 2009;
- *Omer Cerrahoglu* (vârsta – 14 ani) – aur 2009;

şi condusă de:

- Prof.univ.dr. *Radu Gologan* (Leader);
- Prof. *Mihail Bălună* (Deputy leader);
- Prof. *Dan Schwarz* (Observer A);
- Prof. *Cristian Alexandrescu* (Observer B).

BIBLIOGRAFIE

[1] Şt. George Andonie, *Istoria Matematicii în România*, vol.I, Ed. Ştiinţifică, 1965.
[2] F. Diac, *Monografia S.S.M.R.*, Bucureşti, 1998, Colecţia Biblioteca S.S.M.R.
[3] M.Trifu, *Fenomenul Gazeta Matematică la 110 ani*, G.M.-B nr. 9/2005 (Număr jubiliar).
[4] *** *Gazeta Matematică*, 1895-1935, Istorie-învăţăminte (Volum jubiliar)
[5] *** Gazeta Matematică, nr. 9/1995 (Număr jubiliar).
[6] *** Colecţia Gazeta Matematică, 1895-2009,
http://www.gazetamatematica.net/ http://www.imo-official.org/

Centenar pentru matematicienii români – 2009

MARIOARA COSTĂCHESCU[1)]

Vom trece în revistă, câteva aspecte esenţiale din viaţa şi activitatea a doi matematicieni români, născuţi la 1909.

George Theiler

George Theiler, s-a născut la Bârlad, la 3 august 1909. Studiile primare şi liceul şi le-a făcut în oraşul natal. În toamna anului 1928 s-a înscris la Universitatea din Bucureşti, Facultatea de ştiinţe, de unde în 1931 a obţinut licenţa în matematici. În perioada 1931-1949 a lucrat ca actuar şi expert actuar, la „Societatea generală de asigurări", unde a avut şi funcţii importante. În anul 1952 a fost numit lector la catedra de matematici a Institutului de Petrol şi Gaze din Bucureşti, unde a funcţionat până în 1961. În octombrie 1960 şi-a trecut doctoratul în ştiinţele matematice, cu teza: „*Contribuţii la teoria statisticii neparametrice. Probleme de tip Kolmogorov-Smirnov; Manya Kvit; Renyi.*" Din 1962 a fost numit conferenţiar de analiză matematică la Institutul Pedagogic de 3 ani din Bucureşti. Pe

[1)]Profesor, Liceul cu program sportiv, Roman, jud. Neamţ

bază de concurs, în 1963, a fost numit şef de sector la statistica matematică la Institutul de matematică al Academiei Române. Când în aprilie 1964 s-a înfiinţat Centrul de statistică al Academiei, a trecut ca şef de secţie la teoria probabilităţilor de la acest centru.

Urmărind etapele din viaţa acestui matematician, observăm că l-a preocupat cu precădere *Teoria probabilităţilor şi Statistica matematică*, domenii în care a publicat şi diverse lucrări. Cu totul întâmplător a atacat şi alte domenii matematice. Amintim aici:

a) funcţii egale aproape peste tot, integrabile *Riemann*;

b) rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene, în cazul când ecuaţia caracteristică are rădăcini multiple;

c) a dat o demonstraţie directă pentru teorema lui *Kronecker* din teoria funcţiilor aproape periodice.

În *Statistica Matematică* are, în special contribuţii la *Teoria Statisticii Neparametrice*: a dat un model probabilistic pentru unele probleme de statistică neparametrică; a studiat probleme de statistică neparametrică bidimensionale; a examinat criteriile lui *Kolmogorov* şi *Smirnov* din teoria statisticii neparametrice; a studiat problema distribuţiei asimptotice comune pentru două cantităţi corespunzând unui şir variaţional de experienţe referitoare la o variabilă aleatoare.

În *Teoria probabilităţilor*, folosind o teoremă a lui *Onicescu* şi *Mihoc* despre lanţuri cu legături complete, simple şi staţionare, cu un număr finit de stări, *George Theiler* a arătat că aceasta este valabilă şi în cazul când se renunţă la a treia condiţie pusă. A trecut apoi la determinarea efectivă a claselor de lanţuri cu legături complete cărora li se aplică această teoremă ergodică.

A avut colaborări cu *Gh. Mihoc* şi *Dumitru Firescu*, iar lucrările lui au apărut în Analele Universităţii Bucureşti, în Comunicările Academiei Române şi în reviste ca: Studii şi cercetări matematice sau Revista de statistică.

Dumitru Firescu

Dumitru Firescu s-a născut la 10 decembrie 1909, în localitatea Bârza, din fostul judeţ Dolj. Liceul l-a urmat la Craiova, luându-şi bacalaureatul în 1928. A intrat imediat la Facultatea de ştiinţe a Universităţii din Bucureşti, secţia matematici, de unde a obţinut licenţa în matematici în 1931.

În perioada 1932-1933 a urmat Şcoala de statistică ce era condusă de *Octav Onicescu*, de unde a obţinut diploma de actuar, pe care a folosit-o între anii 1933-1948, îndeplinind funcţia de actuar la Societatea de asigurări „Naţionala“, din Bucureşti. Simultan a funcţionat tot în Bucureşti ca profesor la cursurile serale ale unei şcoli comerciale. Apoi, în perioada 1948-1958, a funcţionat în învăţământul mediu din Bucureşti. Anul 1958 a marcat trecerea doctoratului la Universitatea din Bucureşti, la Facultatea de matematică şi fizică cu teza, având tema: „*Problema eficienţei funcţiilor de estimaţie pentru probabilităţile fundamentale, directe şi inverse, ale lanţurilor Markov omogene de ordin finit.*“

În toamna anului 1958 a fost numit lector la catedra de matematici aplicate a profesorului *Mihoc*; la această catedră a fost avansat conferenţiar în 1961. După decesul lui *Arno Kahane*, în 1965, *Dumitru Firescu* a rămas şeful catedrei de matematici de la Facultatea de Chimie din cadrul Universităţii din Bucureşti. Din 1964 funcţionează şi la Centrul de statistică al Academiei Române, la secţia de aplicaţii ale statisticii matematice în economie, biologie, medicină şi agricultură.

Publicaţiile lui *Dumitru Firescu* sunt din domeniul *Teoriei probabilităţilor şi Statisticii matematice*. S-a ocupat în special de funcţii de estimaţie eficiente pentru probabilităţi de trecere ale lanţurilor *Markov* sau, în colaborare cu *Gh. Mihoc*, de procese stochastice întâlnite în demografie ori de generalizarea proceselor stochastice.

În primul memoriu publicat s-a ocupat de extinderea unor rezultate stabilite de *Gh. Mihoc* în 1957 privind determinarea funcţiilor de estimaţie pentru probabilităţile de trecere ale unui lanţ *Markov*, discontinuu, simplu şi omogen; a considerat cazul când dintre toate probabilităţile de trecere, elemente ale unei matrici stochastice, numai unele sunt necunoscute şi a arătat, dând o serie de teoreme, că funcţiile de estimaţie sunt numai corecte şi gausiene; ele devin eficiente numai în cazul studiat de *Mihoc*. Pentru probabilităţile de trecere inverse ale unui lanţ *Markov* simplu, omogen, de ordin finit, *Dumitru Firescu* a determinat funcţiile de estimaţie şi a studiat proprietatea de eficienţă şi normalitate asimptotică a acestor funcţii. Pentru cazul unui lanţ *Markov* simplu, care ia valori pe axa reală, *D. Firescu* a determinat, în colaborare cu *Gh. Mihoc*, condiţiile necesare şi suficiente de îndeplinit de densităţile de probabilitate, pentru ca funcţiile de estimaţie să fie eficiente.

Considerând procesele stochastice de naştere şi stingere, generalizare a procesului stochastic dat de fenomenul mortalităţii şi preocupat de generalizarea acestor procese prin intervenţia postacţiunii (ca în fenomenul invalidităţii), *D. Firescu* a studiat evoluţia probabilistică a unui proces de naştere în care intervine o astfel de postacţiune; a calculat probabilităţile care determină evoluţia ulterioară a procesului. Studiind familii de lanţuri *Markov* discrete staţionare cu probabilităţi de trecere strict pozitive, a determinat condiţiile necesare şi suficiente de îndeplinit de probabilităţi, ca funcţiile de estimaţie să fie eficiente. În urma colaborării cu doctorul în medicină *P. Tăutu*, a elaborat un model statistic al hematopoezei (procesul de formare a celulelor sanguine în măduva osoasă).

A mai colaborat, în realizarea lucrărilor sale, cu *G. Theiler* şi *D. Negoiu*, care au apărut în: Analele Universităţii Bucureşti, Comunicările Academiei Române şi în reviste ca: Studii şi cercetări matematice sau Revista de statistică.

Bibliografie

[1] G. Şt. Andonie, *Istoria Matematicii în România*, vol.3, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1967.

[2] S.Coatu, *Mică enciclopedie matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[3] I. Purcaru şi O. Bâsca, *Oameni, idei, fapte din Istoria Matematicii*, Editura Economică, Bucureşti, 1996.

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Şcoala de vară de la Buşteni

A XIII-a ediţie a Cursurilor Şcolii de vară pentru perfecţionarea profesorilor din învăţământul preuniversitar s-a desfăşurat, după tradiţie, la Buşteni, în perioada 27 iulie-6 august 2009. După cum se ştie, aceste cursuri organizate de S.S.M.R., au deja o îndelungată tradiţie, ele debutând la sfârşitul anilor '50 ai secolului trecut (la Săcele) şi continuând, cu o scurtă întrerupere în anii '90, până în zilele noastre.

Gazda cursurilor a fost, ca de obicei în ultimii ani, Centrul de Pregătire pentru Personalul din Industrie, care ne-a asigurat – prin persoana domnului director general *Irinel Ghiţă* şi a subordonaţilor săi – condiţii deosebite, atât în privinţa desfăşurării propriu-zise a cursurilor, cât şi în privinţa cazării participanţilor; trebuie menţionat, de asemenea, totala renovare şi modernizare a grupului alimentar, acesta fiind acum unul din cele mai elegante din staţiune. Tuturor celor menţionaţi mai înainte le adresăm mulţumirile noastre pentru sprijinul acordat în organizare.

Conform regulamentului stabilit de mai mulţi ani, programul zilnic inclusiv sâmbătă – a cuprins trei conferinţe, pentru a acoperi un număr de circa 40 de ore în intervalul 28 iulie-5august, în care s-au desfăşurat cursurile propriu-zise. Spre deosebire de anii precedenţi, la finele cursurilor nu s-a mai desfăşurat un colocviu, acesta fiind înlocuit printr-o sesiune de comunicări şi referate, prezentate atât de cursanţi, cât şi de alte persoane care s-au arătat interesate.[1)] La încheierea cursurilor, toţi participanţii au primit o diplomă care să ateste absolvirea lor.

Faţă de anul precedent s-a înregistrat o scădere uşoară a numărului de participanţi (49 faţă de 54); trebuie să menţionăm aici faptul că la cursuri nu pot participa mai mult de circa 60 de persoane datorită capacităţii sălii de conferinţe.

La deschiderea cursurilor au rostit scurte alocuţiuni prof. univ. dr. *Radu Gologan* – preşedintele S. S. M. R. – şi prof. *Nicolae Angelescu* – inspector general la I. Ş. J. Prahova, preşedintele filialei din Ploieşti a S. S. M. R. Trebuie să menţionăm, de asemenea, prezenţa – la închiderea cursurilor – a domnului *Emanoil Savin*, primarul oraşului Buşteni, care ne-a promis, pe viitor, sprijinul domniei sale în organizarea acestora.

Repartiţia zonală a participanţilor a fost destul de uniformă, menţinându-se, totuşi, pe primul loc judeţele din Moldova şi dintre acestea, judeţul Iaşi unde se remarcă, din nou, activitatea neobosită a profesorului *Vasile Nechita* – secretarul filialei locale.

Absolvenţii cursurilor Şcolii de vară de la Buşteni, ediţia 2009, împreună cu profesorii: Eugen Păltănea, Dumitru Buşneag, Cătălin Gherghe, Ioan Tomescu şi Dan Radu

Cursurile au stârnit un viu interes printre participanţi, marcat pe de-o parte de discuţiile dintre aceştia şi conferenţiari, iar pe de altă parte de sondajul efectuat la finele lor. De altfel, aceste cursuri au constituit totdeauna un teren fertil pentru schimbarea opiniilor între cursanţi şi între aceştia şi conferenţiari pe teme privind învăţământul matematic românesc şi viitorul acestuia.

Tematica cursurilor a fost atent selectată, ţinând seama de sugestiile făcute în anii anteriori în cadrul sondajelor de opinie. Lucrul a fost posibil şi prin cooptarea de noi confernţiari, din generaţiile mai tinere, care s-au arătat interesaţi în prezentarea unor conferinţe axate pe probleme ştiinţifice şi metodice moderne. În măsura posibilităţilor, am căutat să păstrăm un echilibru între subiectele cu caracter de informare ştiinţifică şi cele vizând metodica şi metodologia predării la clasă, primele având, evident, un caracter

[1)] În legătură cu această sesiune se va vedea materialul următor inserat în prezentul număr al revistei. (N.A.)

preponderent. Selectarea conferenţiarilor a fost făcută cu deosebită grijă, fiind solicitaţi, cu precădere, acei universitari, care, în decursul timpului, s-au aplecat cu interes şi seriozitate asupra învăţământului preuniversitar, fiind preocupaţi de perpetua îmbunătăţire şi diversificare a acestuia; nu în ultimul rând, am ţinut seama şi de simpatiile cursanţilor exprimate în sondajele din anii anteriori. Conferenţiarii au izbutit să stabilească un mod de comunicare simplu şi eficient cu profesorii cursanţi, fără a abuza de informaţia ştiinţifică şi, ceea ce ni se pare esenţial, neadoptând o poziţie *ex cathedra*.

Vom prezenta, mai jos, tematica conferinţelor susţinute.

• prof. univ. dr. *Ioan Tomescu* (Universitatea din Bucureşti, membru corespondent al Academiei Române), „Aspecte metodice privind predarea noţiunilor de combinatorică în liceu"; „Poliedre convexe şi grafuri planare, fulerene şi lema lui *Sperner*"; „Blocuri design, triplete *Steiner*, grafuri bipartite şi implicaţii asupra problemelor de olimpiadă".

• prof. univ. dr. *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti), „Întregi pătratici"; „Unicitatea descompunerii în factori primi ai întregilor pătratici".

• prof. univ. dr. *Radu Gologan* (Universitatea Politehnica din Bucureşti), „Olimpiada Internaţională de Matematică – Bremen 2009".

• prof. univ. dr. *Doru Ştefănescu* (Universitatea din Bucureşti), „De ce nu ne este frică de polinoame"; „Cum cultivăm Istoria Matematicii?".

• prof. univ. dr. *Dumitru Buşneag* (Universitatea din Craiova), „Elemente de teoria categoriilor în matematica preuniversitară".

• prof. univ. dr. *Valeriu Guţu* (Universitatea de Stat din Republica Moldova), „De ce tabela valorilor funcţiilor trigonometrice este aşa de mică?"; „Bilete cu noroc şi funcţii generatoare".

• conf. univ. dr. *Dragoş Popescu* (Universitatea din Bucureşti), „Teoria cuplajelor şi aplicaţii (I)"; „Teoria cuplajelor şi aplicaţii (II)".

• conf. univ. dr. *Alexandru Gica* (Universitatea din Bucureşti), „Probleme de ordin în baraje şi la O.I.M."; „Analiza matematică şi teoria numerelor. Probleme".

• conf. univ. dr. *Cătălin Gherghe* (Universitatea din Bucureşti), „Metode de teoria codurilor în probleme de tip O.I.M."; „Aria figurilor poligonale";

• conf. univ. dr. *Eugen Păltănea* (Universitatea Transilvania din Braşov), „Extinderi ale unor criterii clasice de convergenţă".

• conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte), „Exemple şi contraexemple în analiza matematică liceală"; „Câteva rezultate şi formule completare referitoare la integrala Riemann a funcţiilor continue".

Ca şi în anii precedenţi vom aminti prezenţa la cursuri a multora dintre „veterani", acei profesori care constituie un adevărat nucleu al cursanţilor şi al căror lider necontestat este profesorul *Vasile Nechita*, participant la toate ediţiile de până acum. De asemenea, vom menţiona faptul că am acordat o nouă diplomă de fidelitate (pentru participarea la şapte ediţii consecutive a cursurilor) doamnei profesoare *Maria Mihăeş* de la Colegiul Naţional Danubiana din Roman. O felicităm şi pe această cale, atât pe domnia sa, cât şi pe toţi ceilalţi „veterani" ai cursurilor.

La încheierea acestor succinte însemnări trebuie să adresăm mulţumirile noastre sincere domnului profesor *Nicolae Angelescu* – inspector general la I. Ş. J. Prahova şi preşedinte al filialei Ploieşti a S.S.M.R. şi doamnei profesoare *Mirela Dobrea* – directoare a grupului şcolar Ioan Kalinderu din Buşteni – pentru sprijinul neprecupeţit acordat în buna organizare şi desfăşurare a cursurilor . Acestora şi multor altora, anonimi, le exprimăm gratitudinea noastră.

Dan Radu

Lista absolvenţilor cursurilor de perfecţionare pentru profesorii de matematică, organizate de S.S.M.R. la Buşteni, în perioada 27 iulie-6 august 2008

1. Alexa Lenuţa	Gr. Şc. Gh. Asachi – Galaţi
2. Badea Aurelia Liliana	Lic. Teoretic Dimitrie Bolintineanu – Bucureşti
3. Bejan Cornelia Livia	Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi – Iaşi
4. Burtea Anne-Marie	Gr. Şc. – Oraş Ovidiu
5. Cavachi Clarisa Ioana	C. N. Bilingv Gh. Coşbuc – Bucureşti
6. Câlţea Elena	Colegiul Tehnic de Arhitectură şi Lucrări Publice I. N. Socolescu – Bucureşti
7. Chirea Elena	Lic. Teoretic Nicolae Bălcescu – Medgidia
8. Chiriac Gilena	Gr. Şc. T. Vuia – Craiova
9. Cojocea Tatiana	Şc. cu clasele I-VIII nr. 108 Alexandru Obregia– Bucureşti
10. Costăchescu Mărioara	Lic. cu Program Sportiv – Roman
11. Creţu Ciprian	Col. Tehnic Gheorghe Asachi – Iaşi
12. Dragomir Luminiţa	C.N. C. Negri – Galaţi
13. Frenţ Angela	Col. Tehnic Feroviar – Braşov
14. Gavriluţ Mihai	C. N. Roman Vodă – Roman
15. Georgescu Mioara	Ş. nr. 26 – Craiova
16. Iosub Maria	C. N. Ştefan cel Mare – Tg. Neamţ
17. Kifor Roxana	Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi – Bucureşti
18. Luchian Dorel	Lic Tehn. M. Costin – Iaşi
19. Macovei Monica Felicia	Colegiul Tehnic Petru Muşat – Suceava
20. Maftei Maria	Şc. de Arte şi Meserii – Dulceşti
21. Marinescu Damian	Şc. cu clasele I-VIII Tudor Vladimirescu – Târgovişte
22. Mihai Marcela	Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi – Bucureşti
23. Mihăeş Maria	Colegiul Tehnic Danubiana – Roman
24. Mihăilă Adriana	Lic. Teoretic N. Iorga – Brăila
25. Murar Aurelia	Lic. cu Prog. Sportiv Banatul – Timişoara
26. Müller Gina	Lic. Ec. C. C. Kiriţescu – Bucureşti
27. Nechita Vasile	Colegiul Costache Negruzzi – Iaşi
28. Necula Elena	Gr. Şc. Forestier – Câmpina
29. Negrea Ana Maria	Gr. Şc. Traian Vuia – Târgu Mureş
30. Negrea Nicodim	Lic. Tehnic Traian – Deva
31. Nica Paula	Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi – Bucureşti
32. Niţu Ştefan	Lic. Teoretic Al I. Cuza – Alexandria
33. Nour Maria	Şc. gimnazială nr. 41 Sf. Grigore Teologul - Galaţi
34. Novac Iulian	Şc. gen. A. Mureşan - Deva
35. Oleniuc Claudia	Gr. Şc. Virgil Madgearu – Iaşi
36. Oleniuc Mariana	Şc. cu clasele I-VIII Blăgeşti – Paşcani
37. Pălici Aurelia	Col. Naţional Octav Onicescu – Bucureşti
38. Păuna Neculae	Şc. gen. Coresi – Târgovişte
39. Pâslaru Mihaela Lăcrămioara	Şc. M. Eminescu – Roman
40. Popa Filofteia	Şc. cu clasele I-VIII nr. 12 – Târgovişte
41. Popa Gabriel	Col. Naţ. – Iaşi
42. Popescu Maria	Şcoala Centrală – Bucureşti
43. Radu Margareta	Şc. nr. 3 – Botoşani

44. Radu Marin	Şc. gen. nr. 3 – Botoşani
45. Roman Neculai	Şc. cu cl. I-VIII Vasile Alecsandri–Mirceşti,
46. Sbiera Elena Oltiţa	Colegiul Tehnic Al. I. Cuza – Suceava
47. Topan Daniela Adina	Colegiul Tehnic de Transporturi Transilvania – Cluj-Napoca
48. Tulcianu Ana-Maria	Gr. Şc. D. Cantemir – Babadag
49. Ţilică Daniela	Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi – Bucureşti
50. Vega Mariana	Şc. gen. nr. 13 Mircea cel Bătrân – Piteşti
51. Voicu Adriana	Lic. Ped. Matei Basarab – Slobozia

Prima sesiune de comunicări şi referate metodico-ştiinţifice organizată de S.S.M.R cu ocazia Şcolii de vară de la Buşteni

În urma unei hotărâri a conducerii S.S.M.R. şi conducerii Cursurilor de vară de la Buşteni, începând cu acest an, colocviul care marca finalul cursurilor a fost înlocuit cu o sesiune de comunicări şi referate la care cursanţii se pot înscrie benevol. De asemenea, la sesiune pot participa şi alte persoane interesate care au trimis din timp comunicarea sau referatul cu care vor să participe.

A fost alcătuit un comitet ştiinţific care a avut menirea de a selecta dintre lucrări acelea care prezintă un interes deosebit şi care au fost susţinute în plen.[1)] Anul acesta comitetul a fost compus din următorii:

- **Dumitru Buşneag** (Universitatea din Craiova)
- **Cătălin Gherghe** (Universitatea din Bucureşti)
- **Radu Gologan** (Universitatea Politehnică din Bucureşti, Institutul de Matematică Simion Stoilov al Academiei Române)
- **Eugen Păltănea**(Universitatea Trabsilvania din Braşov)
- **Dan Radu** (Universitatea Politehnica din Bucureşti)
- **Doru Ştefănescu** (Universitatea din Bucureşti)
- **Ioan Tomescu** (Universitatea din Bucureşti, membru corespondent al Academiei Române).

De asemenea, a fost format un comitet de organizare care s-a ocupat de buna desfăşurare a lucrărilor. Din acesta au făcut parte:

- **Cătălin Gherghe** (Universitatea din Bucureşti)
- **Radu Gologan** (Universitatea Politehnică din Bucureşti, Institutul de Matematică Simion Stoilov al Academiei Române)
- **Dan Radu** (Universitatea Politehnica din Bucureşti)
- **Doru Ştefănescu** (Universitatea din Bucureşti, prim-vicepreşedinte al S.S.M.R.)
- **Ioan Tomescu** (Universitatea din Bucureşti, membru corespondent al Academiei Române, preşedinte de onoare al S.S.M.R.).

Lucrările sesiunii s-au desfăşurat în data de 5 august, după încheierea cursurilor. Vom mai menţiona că la sesiune a mai participat şi un invitat din străinătate în persoana domnului *Irineu Glajar* de la Austin Community College din Austin, Texas, S.U.A.

Subiectele comunicărilor şi referatelor au acoperit o arie largă de preocupări începând cu cele cu caracter ştiinţific sau metodic şi terminând cu cele care vizează teme din istoria

[1)] Aceste lucrări au fost menţionate în lista de comunicări şi referate prezentată mai jos printr-un asterisc. (N.A.)

matematicii, dar şi cele legate de problematica generală a învăţământului preuniversitar. Diversitatea tematicii abordate reflectă lărgirea ariei de preocupări a profesorilor, tendinţa acestora de a se ancora mai ferm în realitate, preluând tradiţiile înaintaşilor. Vom remarca, în mod deosebit, seriozitatea şi competenţa cu care autorii au tratat tematica aleasă – desigur, în mare măsură clasică – foarte mulţi dintre ei vizând deschideri către alte domenii ale învăţământului sau ale vieţii de zi cu zi, precum şi conexiuni metodice interesante şi cu un vădit caracter original.

Vom insera, mai jos, lista completă a lucrărilor înscrise în sesiune.

(1) **Maria Margareta Agapi** –Şcoala George Călinescu, Oneşti, jud. Bacău – „Zâmbetul ştiinţei"
(2) **Lenuţa Alexa** – Grupul Şcolar Industrial Gheorghe Asachi, Galaţi, jud. Galaţi – „Asupra demonstraţiei teoremei lui Pitagora numai cu rigla negradată şi compasul"
(3) **Aurelia Badea** – Liceul Teoretic Dimitrie Bolintineanu, Bucureşti – „Ion Barbu – poetul matematician"
(4) **Cornelia Bejan** – Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi, Iaşi, jud. Iaşi – „Structuri algebrice definite geometric"
(5) **Ane-Marie Burtea** – Grupul Şcolar, Ovidiu, jud. Constanţa – „Convexitate şi majorizare"
(6) **Lucia Buruiană** – Şcoala cu clasele I-VIII Cezar Petrescu, Buşteni, jud. Prahova – „Numere prime, numere compuse"
(7) **Petre Buruiană** – Grupul Şcolar Ion Kalinderu, Buşteni, jud. Prahova – „Inegalităţi între elementele unui triunghi"
(8) **Clarisa Ioana Cavachi** – Colegiul Naţional Bilingv George Coşbuc, Bucureşti – „Integrale ≪surori≫"
(9) **Elena Chirea** – Colegiul Naţional Nicolae Bălcescu, Medgidia, jud. Constanţa – „Traian Lalescu – un matematician peste ani" (*)
(10) **Tatiana Cojocea** – Şcoala nr. 108 Alexandru Obregia, Bucureşti – „Aspecte specifice ale rezolvării ecuaţiilor"
(11) **Mărioara Costăchescu** – Liceul cu Program Sportiv, Roman, jud. Neamţ – „Anul 2009 în lumea matematicii" (*)
(12) **Ligia Darău** – Colegiul Tehnic Dr. A. Bărbat, Victoria, jud. Braşov – „Experiment didactic comparativ pe tema evaluării"
(13) **Luminiţa Dragomir** – Colegiul Naţional Costache Negri, Galaţi, jud. Galaţi – „Forme, metode şi instrumente de evaluare. Tehnici moderne la disciplina matematică"
(14) **Ştefan Nicolae Dumitrescu** – Colegiul Naţional Ştefan Velovan, Craiova, jud. Dolj – „Ecuaţii diofantice de tipul $x^2 - 4y^2 = 1$"
(15) **Mihai Gavriluţ** – Colegiul Naţional Roman Vodă, Roman, jud. Neamţ – „Generalizarea unor inegalităţi"
(16) **Mioara Georgescu** – Şcoala nr. 26 Craiova, jud. Dolj – „Matematica aplicată"
(17) **Irineu Glajar** – Austin Community College, Austin, Texas, S.U.A. – „Predarea matematicii la un colegiu de doi ani în S.U.A." (*)
(18) **Maria Iosub** – Colegiul Naţional Ştefan cel Mare, Târgu Neamţ, jud. Neamţ – „Generalizări ale unor probleme din revista Sinus" (*)
(19) **Monica Macovei** – Colegiul Tehnic Petru Muşat, Suceava, jud. Suceava – „Omotetia în plan" (*)
(20) **Damian Marinescu** – Şcoala Tudor Vladimirescu, Târgovişte, jud. Dâmboviţa – „Construcţia mediei armonice a două segmente"
(21) **Marcela Mihai** – Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi, Bucureşti – „Inegalităţi clasice. Aplicaţii" (*)

(22) **Adriana Mihăilă** – Liceul Teoretic Nicolae Iorga, Brăila – „Aplicaţii ale inegalităţilor în rezolvarea de ecuaţii şi sisteme“ (*)
(23) **Gina Müller** – Colegiul Economic C. C. Kiriţescu, Bucureşti – „Aplicaţii ale teoremei lui Lagrange“
(24) **Aurelia Murar** – Liceul cu Program Sportiv Banatul, Timişoara, jud. Timiş – „Strategii didactice eficiente în lecţiile de recapitulare şi sistematizare“
(25) **Vasile Nechita** – Colegiul Costache Negruzzi, Iaşi, jud. Iaşi – „Proprietăţi ale funcţiilor convexe. Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul funcţiilor convexe“
(26) **Elena Necula** – Grupul Şcolar Forestier, Câmpina, jud. Prahova – „Frontiera dintre matematică şi inteligenţă“
(27) **Ana-Maria Negrea** – Grupul Şcolar Traian Vuia, Târgu Mureş, jud. Mureş – „Unele aplicaţii ale generalizării teoremei lui Lagrange“ (*)
(28) **Nicodim Negrea** – Liceul Teoretic Traian, Deva, jud. Hunedoara – „Calcule de sume“
(29) **Ştefan Niţu** – Liceul Teoretic Al. I. Cuza, Alexandria, jud. Teleorman – „Vectori. Vectori a căror sumă este vectorul $\overrightarrow{0}$. Aplicaţii.“
(30) **Maria Nour** – Şcoala Gimnazială nr. 41 Sf. Grigore Teologul, Galaţi, jud. Galaţi – „Promovarea metodelor activ-participative în însuşirea cunoştinţelor de matematică“
(31) **Iulian Novac** – Şcoala Andrei Mureşanu, Deva, jud. Hunedoara – „Despre sisteme de numeraţie“
(32) **Claudia Oleniuc** – Grupul Şcolar Virgil Madgearu, Iaşi, jud. Iaşi – „Un nume românesc pe harta lumii: Spiru Haret“
(33) **Mariana Oleniuc** – Şcoala cu clasele I-VIII, Blăgeşti-Paşcani, jud. Iaşi – „Ordine şi haos“
(34) **Aurelia Pălici** – Colegiul Naţional Octav Onicescu, Bucureşti – „Caracterizarea subgrupurilor aditive ale lui $\mathbb{R}$ şi aplicaţii în probleme de analiză matematică“ (*)
(35) **Nicolae Păuna** – Şcoala Coresi, Târgovişte, jud. Dâmboviţa – „Explorarea problemelor de loc geometric cu instrumente virtuale create cu CABRI GEOMETRY II“ (*)
(36) **Mihaela Pîslaru** – Şcoala Mihai Eminescu, Roman, jud. Neamţ – „Modernizarea conceptului de predare-învăţare prin informatizarea învăţământului (utilizarea laboratoarelor A.E.L. şi a softurilor la orele de matematică).“
(37) **Filofteia Popa** – Şcoala nr. 12, Târgovişte, jud. Dâmboviţa – „Metode activ-participative folosite în predarea matematicii“
(38) **Maria Popescu** – Şcoala Centrală, Bucureşti – „Eleganţa raţionamentelor matematice“ (*)
(39) **Neculai Roman** – Şcoala Vasile Alecsandri, Mirceşti, jud. Iaşi – „În legătură cu problemele C.O: 4932 şi C.O: 4953“ (*)
(40) **Elena Oltiţa Sbiera** – Colegiul Tehnic Al. I. Cuza, Suceava, jud. Suceava – „Inversiunea în plan“ (*)
(41) **Daniela Adina Topan** – Colegiul Tehnic de Transporturi Transilvania, Cluj Napoca, jud. Cluj – „Aspecte privind punctul intermediar în teorema de medie“
(42) **Daniela Ţilică** – Grupul Şcolar Industrial Gheorghe Asachi, Bucureşti – „Şiruri recurente“
(43) **Mariana Vega** – Şcoala nr. 13, Piteşti, jud. Argeş – „Istoria matematicii în lecţia curentă“
(44) **Adriana Voicu** – Liceul Pedagogic Matei Basarab, Slobozia, jud. Ialomiţa – „Conciziune şi eficienţă în rezolvarea problemelor de matematică“

Lucrările sesiunii s-au bucurat de un deosebit succes, multe dintre comunicările prezentate stârnind vii discuţii şi aprecieri, comentarii şi completări. Având în vedere opinia pozitivă unanimă, vom perpetua această iniţiativă şi în anii următori.

Dan Radu

RECENZII

TITU ANDREESCU, GABRIEL DOSPINESCU, Problems from the Book, XYZ Press, LLC, 2008

Parafrazând un text celebru bazat pe problemele considerate dumnezeieşti de *Paul Erdös* (Proof from the Book, autori *M. Aijner* şi *G. M. Ziegler*, Springer Verlag, 2003) autorii au adunat într-un text extrem de generos (peste 550 de pagini) 23 de lecţii de matematică problemistică, nu neapărat elementară, bazate pe afinităţle lor matematice.

Fiecare astfel de lecţie conţine un preambul intitulat „Teorie şi exemple" în care sunt trecute în revistă principiile legate de subiectul discutat şi câteva probleme cu soluţii complete ce exemplifică titlul paragrafului. A doua parte a paragrafelor „Proleme de antrenament" conţine între 15 şi 25 de probleme lăsate cititorului ca exerciţiu, evident caracteristice domeniului discutat.

Adeseori exemplele prezentate sunt total neelementare şi chiar legate de tehnici noi de cercetare matematică: vezi, de exemplu, teorema *Van der Corput* din lecţia dedicată distribuţiei uniforme (lecţia 15).

Cu toate aceste excepţii, problemele provin în mare parte din cele aflate pe listele olimpiadelor de matematică din diverse ţări şi ale Olimpiadelor Internaţionale. Mai mult, ambii autori fiind legaţi de aceste competiţii (*Titu Andreescu* este de peste 30 de ani implicat în concursurile de matematică din România şi S.U.A. şi autor a peste 20 de monografii pe acest subiect, iar *Gabriel Dospinescu*, un eminent problemist, fost câştigător al concursului de admitere la celebra École Normale Superieure din Franţa şi fost olimpic internaţional al României), aproape 50% din probleme îi au ca autori sau au ca autori matematicieni români.

Cartea este, după părerea mea şi a multora dintre colegii ce au răsfoit-o sau au studiat-o, un excelent text pentru pregătirea concursurilor de tipul Olimpiadei Internaţionale, concursului Putnam din S.U.A. sau al olimpiadelor studenţeşti.

Părerea personală este în acelaşi timp că, parcursul cărţii este inegal nu numai în desfăşurarea lecţiilor, dar şi în cadrul fiecărei lecţii în parte: subiecte simple combinate cu unele nebanale, probleme minunate şi nebanale cu unele prea tehnice şi fără substrat matematic adevărat.

Cu toate acestea, acest text nu poate lipsi din biblioteca oricărui matematician pasionat de „problem solving", patina de excepţional problemist şi matematician a lui *Gabriel Dospinescu* fiind prezentă la fiecare pas.

Radu Gologan

ADRIANA DRAGOMIR, LUCIAN DRAGOMIR, OVIDIU BĂDESCU, ION DAMIAN BÎRCHI, Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a IX-a, a X-a, a XI-a, a XII-a (şi nu numai)

Editura BÎRCHI, Timişoara, 2009

Lucrarea reprezintă una dintre cele mai monumentale şi complete culegeri de probleme destinate învăţământului liceal, apărute în ultimii ani. Redactată în patru volume – fiecare dintre ele destinat unei clase de liceu – ea acoperă întreaga programă actuală a liceului, cu cele în jur dde 2000 de probleme pe care le conţine.

Rod al unei îndelungate şi vaste experienţe a autorilor, culegerea constituie o selecţie valoroasă a unor probleme atât clasice, cât şi de ultimă oră, apărute în literatura de specialitate (culegeri, reviste etc.) de-a lungul timpului (ne referim la ultimii vreo 40 de ani).

Ceea ce îi conferă un statut aparte printre alte demersuri similare este faptul că problemele au un variat grad de dificultate de ea, putând să se folosească atât elevii cu posibilităţi mai modeste cât şi cei ce pregătesc diverse concursuri de matematică sau olimpiade, deci cei care au un potenţial intelectual mai ridicat şi exigenţele pe măsură.

Toate problemele sunt însoţite de răspunsuri, indicaţii şi – dacă este cazul – chiar soluţii complete pentru cele mai dificile.

Selecţia atentă şi riguroasă a problemelor oferă cititorului o paletă largă de subiecte de reflecţie, pentru cei interesaţi constituind un stimul în perfecţionare şi autodepăşire. În acest sens vom menţiona cele patru capitole finale, de la sfârşitul fiecărui volum, intitulate sugestiv „Probleme pentru olimpiade şcolare şi nu numai“, care constituie fiecare un florilegiu al celor mai interesante probleme propuse în decursul timpului la diverse concursuri de matematică şi olimpiade. În această ordine de idei vom menţiona faptul că pe aceste liste de probleme apar numele celor mai cunoscuţi propunători, mulţi dintre ei veterani ai acestui tip de activitate.

În concluzie, recomandăm cu căldură utilizarea acestei culegeri de probleme, atât de către elevi cât şi de către profesori, ea constituind un preţios adjuvant atât în munca de zi cu zi, cât şi în pregătirea concursurilor şi olimpiadelor. Pentru a uşura celor interesaţi procurarea culegerii, vom da adresa de e-mail a editurii: `rmt.mate@yahoo.com`.

Dan Radu

ERATĂ

I. În G.M.-A nr. 4/2008, la pag. 359, rândul 2 de jos, se va citi „Kalinderu“, în loc de „Kolinderu“.

II. În G.M.-A nr. 1/2009 se vor face următoarele modificări:

- la pag. 61, rândul 20 de sus, în loc de al doilea „x_1“ se va citi „x_3“;
- la pag. 63, rândul 11 de sus, în loc de „V. Chiriţă“ se va citi „V. Chiriac“;
- la pag. 64, rândul 14 de jos, în loc de „$\frac{1}{2}$“ se va citi „$-\frac{1}{2}$“;
- la pag. 64, rândul 4 de sus, în loc de „$BC - QP$“ se va citi „$BC||QP$“;
- la pag. 64, rândul 6 de jos, în loc de „$b_n - 1$“ se va citi „b_{n-1}“;
- la pag. 66, rândul 5 de sus, în loc de „$4\cos^{\alpha}$“ se va citi „$4\cos^3\alpha$“;
- la pag. 66, rândul 9 de sus, în loc de „$\alpha = 2$“ se va citi „$a = 2$“;
- la pag. 98, rândul 3 de jos, în loc de „Mihaela Doinaca“ se va citi „Mihaela Doinaru“.

Redacţia